

ВЫПУСК

113

Библиотечка КВАНТ



А.А. Заславский

Олимпиады имени И.Ф.ШАРЫГИНА



Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ
ВЫПУСК

113

Приложение к журналу
«Квант» № 5/2009

А.А. ЗАСЛАВСКИЙ

**Олимпиады имени
И.Ф.ШАРЫГИНА
(2005 – 2009)**



0028501



Москва
2009

УДК 373.167.1:514(075.3)

ББК 22.151.0я721

3-36



Серия
«Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, В.Л.Гинзбург,
Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов,
С.П.Новиков, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко,
В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,
А.И.Черноуцан



В издании серии «Библиотечка «Квант»
финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХНАБЭКСПОРТ»

Заславский А.А.

3-36 Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина. – М.: Бюро Квантум,
2009. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 113. Приложение к
журналу «Квант» №5/2009.)

ISBN 978-5-85843-094-0

В книге приведены задачи геометрических олимпиад имени
И.Ф.Шарыгина с момента основания олимпиады и по текущий год. Ко
всем задачам даны подробные решения.

Сборник предназначен школьникам, учителям математики и руково-
дителям математических кружков, а также всем любителям геометрии.

ББК 22.151.0я721

ISBN 978-5-85843-094-0

© Бюро Квантум, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление	4
Первая олимпиада (2005)	5
Вторая олимпиада (2006)	12
Третья олимпиада (2007)	19
Четвертая олимпиада (2008)	25
Пятая олимпиада (2009)	33
Решения задач	41
Первая олимпиада (2005)	41
Вторая олимпиада (2006)	75
Третья олимпиада (2007)	103
Четвертая олимпиада (2008)	119
Пятая олимпиада (2009)	140

Олимпиады по геометрии проводятся начиная с 2005 года, в память об известном математике и педагоге Игоре Федоровиче Шарыгине (1937–2004). В оргкомитет и жюри олимпиады входят известные ученые, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов, в том числе сотрудники и постоянные авторы журнала «Квант» Н.П.Долбилин, В.И.Голубев, В.Ю.Протасов, П.А.Кожевников, И.И.Богданов, Б.Р.Френкин и др.

Олимпиада состоит из двух туров: заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика», журнале «Математика в школе», а также на сайтах www.mcsme.ru и www.geomerty.ru, могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура – учащиеся 8–10 классов – приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

К настоящему времени состоялось пять олимпиад имени И.Ф.Шарыгина. Заочные туры этих олимпиад проходили в 2005–2009 годах с января по май. Финальный тур Первой олимпиады прошел в Москве в сентябре 2005 года. В дальнейшем финальные туры проводились в конце июля – начале августа в Дубне. Начиная с Четвертой олимпиады финальные туры стали проводиться в два дня, в течение которых школьникам каждого класса предлагается по 8 задач. Кроме этого, во время финального тура для школьников организуются лекции известных математиков, различные спортивные и культурные мероприятия.

Следует отметить, что если на первых олимпиадах контингент участников ограничивался гражданами России и некоторых стран СНГ, то впоследствии в заочных, а затем и финальных турах стали участвовать и школьники из дальнего зарубежья. Кроме того, на последних олимпиадах в состав жюри и в число авторов задач вошли победители и призеры предыдущих олимпиад Е.Авксентьев, Н.Гончарук, М.Козачок, М.Илюхина, Ф.Нилов, Ф.Ивлев, К.Савенков, С.Рохоата (Румыния).

В эту книгу включены все задачи заочных и финальных туров олимпиад имени И.Ф.Шарыгина 2005–2009 годов. Автор благодарит Н.Белухова (Болгария), И.И.Богданова и А.Г.Мякишева, написавших и проиллюстрировавших часть решений, а также А.Д.Блинкова, Б.Р.Френкина и Д.В.Прокопенко, регулярно проверявших и исправлявших материалы олимпиад.

Заочный тур

1. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P . Перпендикуляры к AC и BD в точках C и D , соответственно, пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

А.Заславский

2. Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру.

Л.Емельянов

3. Дана окружность и точка K внутри нее. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку K , имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд.

В.Протасов

4. При каком наименьшем n существует выпуклый n -угольник, у которого синусы всех углов равны, а длины всех сторон различны?

Б.Френкин

5. Имеются две параллельные прямые p_1 и p_2 . Точки A и B лежат на p_1 , а C на p_2 . Будем перемещать отрезок BC параллельно самому себе и рассмотрим все треугольники ABC , полученные таким образом. Найдите геометрическое место точек, являющихся в этих треугольниках: а) точками пересечения высот; б) точками пересечения медиан; в) центрами описанных окружностей.

А.Мякишев

6. Сторону AB треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0 = A, B_1, B_2, \dots, B_n = B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $n + 1$ равных частей (точки деления $C_0 = A, C_1, C_2, \dots, C_{n+1} = C$). Закрасили треугольники $C_i B_i C_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена?

А.Хачатурян

7. Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O . Вершина A правильного треугольника ABC лежит на

большей окружности, а середина стороны BC на меньшей. Чему может быть равен угол BOC ?

В. Протасов

8. Вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом? (Прямоугольник описан около четырехугольника $ABCD$, если на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырехугольника).

Д. Терёшин

9. Пусть O – центр правильного треугольника ABC . Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M – середина отрезка PO .

А. Мякишев

10. Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковы.

Т. Емельянова

11. Квадрат разрезали на n прямоугольников со сторонами $a_i \times b_i$, $i = 1, \dots, n$. При каком наименьшем n в наборе a_1, \dots, a_n , b_1, \dots, b_n все числа могут оказаться различными?

Л. Емельянов

12. Постройте четырехугольник по заданным сторонам a , b , c и d и расстоянию l между серединами его диагоналей.

В. Смирнов

13. Дан треугольник ABC и две прямые l_1 , l_2 . Через произвольную точку D на стороне AB проводится прямая, параллельная l_1 , пересекающая AC в точке E , и прямая, параллельная l_2 , пересекающая BC в точке F . Постройте точку D , для которой отрезок EF имеет наименьшую длину.

А. Заславский

14. Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC . Обозначим через A_1 , B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP , BP и CP соответственно со сторонами BC , CA и AB . Упорядочим площади треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C , обозначив меньшую через S_1 , среднюю – через S_2 , а большую – через S_3 .

Докажите, что

$$\sqrt{S_1 S_2} \leq S \leq \sqrt{S_2 S_3},$$

где S – площадь треугольника $A_1 B_1 C_1$.

Л. Емельянов

15. Дана окружность с центром в начале координат. Докажите, что найдется окружность меньшего радиуса, на которой лежит не меньше точек с целыми координатами.

А. Заславский

16. В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

А. Заславский, Б. Френкин

17. В треугольник ABC вписана окружность, отмечены ее центр I и точки касания P, Q, R со сторонами BC, CA и AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K , в которой окружность, проходящая через вершины B и C , касается (внутренним образом) вписанной окружности.

А. Мякишев

18. На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3 , образующие треугольник, и отмечена точка O – центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i .

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков $O_1 O_2$ и $M_1 M_2$, $O_2 O_3$ и $M_2 M_3$, $O_3 O_1$ и $M_3 M_1$, пересекаются в одной точке.

б) Где может лежать эта точка пересечения?

В. Протасов

19. Как известно, Луна вращается вокруг Земли. Будем считать, что Земля и Луна – это точки, а Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом один оборот в месяц. Летающая тарелка находится в плоскости лунной орбиты. Она может перемещаться прыжками через Луну и Землю – из старого места (точки A) она моментально появляется в новом (в точке A') так, что в середине отрезка AA' находится или Луна, или

Земля. Между прыжками летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве.

а) Определите, какое минимальное количество прыжков потребуется летающей тарелке, чтобы допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты.

б) Докажите, что летающая тарелка, используя неограниченное количество прыжков, может допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты за любой промежуток времени, например, за секунду.

А.Тарасов

20. Пусть I – центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, A' , B' , C' , D' – центры сфер, описанных около тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что сфера, описанная около $ABCD$, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

А.Заславский

21. Планета «Тетраинкогнито», покрытая «океаном», имеет форму правильного тетраэдра с ребром 900 км. Какую площадь океана накроет «цунами» через 2 часа после тетратрясения с эпицентром в

а) центре грани;

б) середине ребра,

если скорость распространения цунами 300 км/ч?

Н.Долбилин

22. К граням тетраэдра восставлены перпендикуляры в их центрах тяжести (точках пересечения медиан). Докажите, что проекции трех перпендикуляров на четвертую грань пересекаются в одной точке.

В.Босс

23. Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками.

Л. и Т. Емельяновы

24. Дан треугольник, все углы которого меньше φ , где $\varphi < \frac{2\pi}{3}$. Докажите, что в пространстве существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом φ .

В.Сендеров

Финальный тур

9 класс

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Докажите, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

А.Заславский

2. Найдите все равнобедренные треугольники, которые нельзя разрезать на три равнобедренных треугольника с одинаковыми боковыми сторонами.

Л.Емельянов

3. Дана окружность и точки A, B на ней. Изобразите множество середин отрезков, один из концов которых лежит на одной из дуг AB , а другой на второй.

И.Шарыгин

4. Пусть P – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M – точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон, O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BSP , APB и CPD . Докажите, что M – середина OH .

А.Мякишев

5. Дано, что ни для какой стороны треугольника из проведенных к ней высоты, биссектрисы и медианы нельзя составить треугольник. Докажите, что один из углов треугольника больше 135° .

Б.Френкин

10 класс

1. Дан выпуклый четырехугольник без параллельных сторон. Для каждой тройки его вершин строится точка, дополняющая эту тройку до параллелограмма, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю четырехугольника. Докажите, что из четырех построенных точек ровно одна лежит внутри исходного четырехугольника.

Л.Емельянов

2. Треугольник можно разрезать на три подобных друг другу треугольников. Доказать, что его можно разрезать на любое число подобных друг другу треугольников.

А.Шаповалов

3. В окружности с центром O проведены две параллельные хорды AB и CD . Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что середина отрезка OP равноудалена от прямых AB и CD .

А.Заславский

4. На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2 , причем $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1B_1 взята точка A_3 , а на продолжении этого отрезка за точку A_2 — точка A_4 , так что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берется точка B_3 , а на продолжении этого отрезка за точку B_2 — точка B_4 , так что $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1}$. Найдите угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4 .

Вим Пайлс, Нидерланды

5. Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X , Y , расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA , CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A' . Найдите расстояние AA' .

А.Заславский

6. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC , X — произвольная точка. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AN , BH , CH в точках A_1 , B_1 , C_1 , а прямые AX , BX , CX — в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

11 класс

1. A_1, B_1, C_1 — середины сторон правильного треугольника ABC . Три параллельные прямые, проходящие через A_1, B_1, C_1 , пересекают, соответственно, прямые B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности.

А.Заславский

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке O , причем B лежит на отрезке OC , и A —

на отрезке OD . I – центр вписанной в треугольник OAB окружности, J – центр невписанной в треугольник OCD окружности, касающейся стороны CD и продолжения двух других сторон. Перпендикуляры, опущенные из середины отрезка IJ на прямые BC и AD , пересекают соответствующие стороны четырехугольника (не продолжения) в точках X и Y . Докажите, что отрезок XY делит периметр четырехугольника $ABCD$ пополам, причем из всех отрезков с этим свойством и с концами на BC и AD XY имеет наименьшую длину.

А.Мякишев

3. Внутри вписанного четырехугольника $ABCD$ существует точка K , расстояния от которой до сторон $ABCD$ пропорциональны этим сторонам. Докажите, что K – точка пересечения диагоналей $ABCD$.

А.Заславский

4. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Вписанная окружность касается прямых AB и AC в точках M и P . Найдите длину хорды, высекаемой на прямой MP окружностью с диаметром BC .

И.Шарыгин

5. На плоскости дан угол и точка K внутри него. Докажите, что найдется точка M , обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K , пересекает стороны угла в точках A и B , то MK является биссектрисой угла AMB .

В.Протасов

6. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D' . Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Докажите, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

И.Богданов

Заочный тур

1. Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом 46° , являются осями симметрии фигуры F . Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура?

В. Смирнов

2. Точки A , B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку.

А. Акопян

3. На карте указаны отрезки трех прямолинейных дорог, соединяющих три деревни, но сами деревни расположены за пределами карты. Кроме того, на карте не указана пожарная часть, находящаяся на равном расстоянии от трех деревень, хотя место ее расположения находится в пределах карты. Можно ли найти это место с помощью циркуля и линейки, если проводить построения только в пределах карты?

Фольклор

4. а) Даны два квадрата $ABCD$ и $DEFG$, причем точка E лежит на отрезке CD , а точки F , G вне квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми AE и BF .

б) Даны два правильных пятиугольника $OKLMN$ и $OPRST$, причем точка P лежит на отрезке ON , а точки R , S , T вне пятиугольника $OKLMN$. Найдите угол между прямыми KP и MS .

А. Горская, И. Богданов

5. а) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски 1×118 .

б) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски $1 \times (100 + 9\sqrt{3})$ (примерно 1×115.58).

В обоих пунктах полоску можно сгибать, но не разрывать.

А. Тарасов

6. а) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющийся хордой окружности радиуса R . Впишите в образовавшийся

сегмент окружность, которая проходит через точку C и касается исходной окружности.

6) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющейся точкой касания окружности радиуса r . Проведите через A и B окружность, касающуюся исходной окружности.

А.Афанасьев

7. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E , а вне – точка F , так что треугольники ABE и BCF равны. Найдите углы треугольника ABE , если известно, что отрезок EF равен стороне квадрата, а угол BFD – прямой.

Д.Калинин

8. Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2 , причем $r_1 > r_2$. Найдите длину AB .

А.Блинков

9. Пусть прямая $L(\alpha)$ соединяет точки единичной окружности, отвечающие углам α и $\pi - 2\alpha$. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке.

А.Канель

10. При каких n правильный n -угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на $n - 2$ равнобедренных (и, возможно, равносторонних) треугольников?

Б.Френкин

11. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности; A' , B' , C' – точки, симметричные A , B , C относительно противоположных сторон; A_1 , B_1 , C_1 – точки пересечения прямых OA' и BC , OB' и AC , OC' и AB . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

12. В треугольнике ABC биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведенных из вершины A . Докажите, что если $\angle A$ тупой, то $AB = AC$.

Б.Френкин

13. Даны две прямые a и b , а также точки A и B . Точка X скользит по прямой a , а точка Y по прямой b , так что $AX \parallel BY$. Найдите ГМТ пересечения AY с XB .

А.Акопян

14. Дана окружность и не лежащая на ней фиксированная точка P . Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников ABP , где AB – диаметр окружности.

А.Заславский

15. Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P , а точка M – середина отрезка PA_1 . Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки M к вписанной и описанной окружности, равны.

В.Протасов

16. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Оказалось, что их вершины образуют правильный треугольник. Верно ли, что исходный треугольник – правильный?

П.Пушкарь

17. В двух окружностях, пересекающихся в точках A и B , проведены параллельные хорды A_1B_1 и A_2B_2 . Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X , а прямые AA_2 и BB_2 – в точке Y . Докажите, что $XY \parallel A_1B_1$.

А.Заславский

18. Через ортоцентр H треугольника ABC проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точке X , а другая пересекает AC в точке Y . Прямые AZ , BZ параллельны соответственно прямым HX и HY . Докажите, что точки X , Y , Z лежат на одной прямой.

А.Акопян

19. Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противоположных углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1 . Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T .

Л.Емельянов

20. Даны четыре точки A, B, C, D . Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC . Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$ и т.д. Докажите, что все окружности, проходя-

щие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.

А.Заславский

21. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты точки C' , A' , B' . Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

$$S_{ABC} S_{A'B'C'}^2 \geq 4 S_{AB'C'} S_{BC'A'} S_{CA'B'}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.

А.Заславский

22. Дана окружность, точки A , B на ней и точка P . Пусть X – произвольная точка окружности, Y – точка пересечения прямых AX и BP . Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников PXY .

А.Заславский

23. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, G – центр тяжести его как однородной пластины (т.е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O . Точку H определим аналогично G , взяв вместо центроидов ортоцентры. Докажите, что точки H , G , O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.

б) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I . Точкой Нагеля N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Докажите, что N , G , I лежат на одной прямой, причем $NG : GI = 2 : 1$.

А.Мякишев

24. а) Через фиксированную точку P внутри данной окружности проводятся два перпендикулярных луча, пересекающие окружность в точках A и B . Найдите геометрическое место проекций P на прямые AB .

б) Через фиксированную точку P внутри данной сферы проводятся три попарно перпендикулярных луча, пересекающие сферу в точках A , B , C . Найдите геометрическое место проекций точки P на плоскости ABC .

Фольклор

25. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC , CD и DA равны α , а при остальных ребрах – β . Найдите отношение AB/CD .

А.Заславский

26. Даны четыре конуса с общей вершиной и образующей одинаковой длины (но, возможно, с разными радиусами оснований). Каждый из них касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности.

Д.Терёшин

Финальный тур

8 класс

1. Впишите в данный полукруг правильный треугольник наибольшего периметра.

И.Яценко

2. При каком наименьшем n существует n -угольник, который можно разрезать на треугольник, четырехугольник,, 2006-угольник?

Б.Френкин

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Две окружности с центрами в вершинах A и C проходят через D . Прямая l проходит через D и вторично пересекает окружности в точках X , Y . Докажите, что $BX = BY$.

В.Протасов

4. Две равные окружности пересекаются в точках A и B . Точка P – отличная от A и B точка одной из окружностей, X , Y – вторые точки пересечения прямых PA , PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB , делит одну из дуг XY пополам.

А.Заславский

5. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого каждая сторона равна какой-нибудь диагонали, а каждая диагональ – какой-нибудь стороне?

В.Гуровиц, Б.Френкин

6. Дан треугольник ABC и точка P внутри него. A' , B' , C' – проекции P на прямые BC , CA , AB . Докажите, что центр

окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC .

М. Волчкевич

9 класс

1. Дана окружность радиуса R . Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R , касаются ее изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.

В. Протасов

2. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC , проходящие через M . Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC , касаются некоторой фиксированной окружности.

В. Протасов

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке AA_1 взята точка A' такая, что $AA'/A_1A' = BC/B_1C_1$. Аналогично строим B' и C' . Докажите, что A' , B' и C' лежат на одной прямой.

А. Акопян

4. В невыпуклом шестиугольнике каждый угол равен либо 90° , либо 270° градусов. Верно ли, что при некоторых длинах сторон его можно разрезать на два подобных ему и неравных между собой шестиугольника?

С. Маркелов

5. Прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот неравностороннего треугольника ABC , делит его периметр и площадь в одном и том же отношении. Найдите это отношение.

А. Заславский

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки A' , B' , C' , D' – ортоцентры треугольников BCD , CDA , DAB , ABC . Докажите, что в четырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие диагонали делятся точками пересечения в одном и том же отношении.

Я. Ганин, F. Rideau

10 класс

1. Пять прямых проходят через одну точку. Докажите, что существует замкнутая пятизвенная ломаная, вершины и середины звеньев которой лежат на этих пря-

мых, причем на каждой прямой лежит ровно по одной вершине.

Hiacinthos

2. Проекции точки X на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Y — точка, симметричная X относительно центра этой окружности. Докажите, что проекции точки B на прямые AX , XC , CY , YA также лежат на одной окружности.

А.Заславский

3. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

П.Кожевников

4. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC , вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1 , B_1 , C_1 . Прямые, проходящие через A , B , C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

5. Может ли развертка тетраэдра оказаться треугольником со сторонами 3, 4 и 5 (тетраэдр можно резать только по ребрам)?

С.Маркелов

6. На доске был нарисован четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность. В нем отметили центры этих окружностей и точку пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, после чего сам четырехугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

А.Заславский

Заочный тур

1. Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные – равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

Б.Френкин

2. Каждая диагональ четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что четырехугольник – ромб?

А.Блинов

3. Отрезки, соединяющие внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n -угольника с его вершинами, делят n -угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно?

Б.Френкин

4. Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарных пересечений биссектрис его углов лежат вне параллелограмма?

А.Блинов

5. Невыпуклый n -угольник разрезали прямолинейным разрезом на три части, после чего из двух частей сложили многоугольник, равный третьей части. Может ли n равняться

- а) пяти;
- б) четырем?

Д.Шноль

6. а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? Укажите все возможные значения.

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

Б.Френкин

7. Выпуклый многоугольник описан около окружности. Точки касания его сторон с окружностью образуют многоугольник с таким же набором углов (порядок углов может быть другим). Верно ли, что многоугольник правильный?

Б. Френкин

8. Три окружности проходят через точку P , а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой. A_1, B_1, C_1 – вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 – точка пересечения прямых AB_1 и BA_1 . A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

А. Заславский

9. Два выпуклых четырехугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы.

А. Заславский

10. Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

А. Заславский

11. Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае. Найдите ответ с точностью до 0,1, радиус Земли считайте равным 6000 км.

Д. Шноль

12. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.

А. Заславский

13. На стороне AB треугольника ABC взяты точки X, Y , такие что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V . Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

А. Заславский

14. В трапеции с основаниями AD и BC точки P и Q – середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$.

А.Заславский

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA' , BB' и CC' . Пусть $A'B' \cap CC' = P$ и $A'C' \cap BB' = Q$. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

М.Волчкевич

16. На сторонах угла взяты точки A , B . Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1 , B_1 , другая – в точках A_2 , B_2 . Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q . Докажите, что M – середина PQ .

В.Протасов

17. Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

Л.Емельянов

18. Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

Б.Френкин

19. В угол A , равный α , вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C . Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M , пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. При каком наименьшем α возможно неравенство $S_{PAQ} < S_{BMC}$?

В.Протасов

20. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трех углов при вершине пирамиды два – прямые. Найдите наибольший объем пирамиды.

Д.Шноль

21. На плоскости лежат три трубы (круговые цилиндры одного размера в обхвате 4 м). Две из них лежат параллельно и, касаясь друг друга по общей образующей, образуют над плоскостью тоннель. Третья, перпендикулярная к первым двум, вырезает в тоннеле камеру. Найдите площадь границы этой камеры.

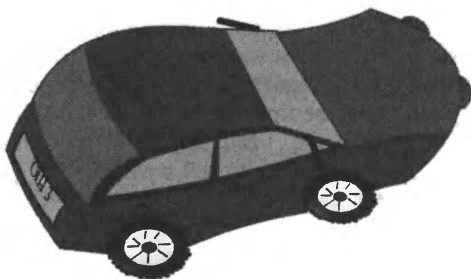
Н.Долбилин

Финальный тур

8 класс

1. Определите, с какой стороны расположен руль у изображенного на рисунке автомобиля.

С.Маркелов



2. Восстановите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) по вершинам A , C и точке на биссектрисе угла B .

Б.Френкин

3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

Б.Френкин

4. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, у которых даны середина одной стороны и основания высот, опущенных на две другие.

А.Заславский

5. Медианы AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке M , причем $\angle AMB = 120^\circ$. Докажите, что углы $AB'M$ и $BA'M$ не могут быть оба острыми или оба тупыми.

С.Берлов

6. Назовем два неравных треугольника *похожими*, если можно обозначить их ABC и $A'B'C'$ так, чтобы выполнялись равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Существуют ли три попарно похожих треугольника?

Б.Френкин

9 класс

1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что радиус этой окружности меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD .

Б.Френкин

2. На основании AD и боковой стороне AB равнобедренной трапеции $ABCD$ взяты точки E , F соответственно так, что $CDEF$ – также равнобедренная трапеция. Докажите, что $AE \cdot ED = AF \cdot FB$.

А.Хачатурян

3. В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = \angle E$. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

А.Заславский

4. Дан треугольник ABC . Точка P лежит на окружности ABH , где H – ортоцентр треугольника. Прямые AP , BP пересекают противоположные стороны треугольника в точках A' , B' . Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.

С.Тахаев

5. Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и основание опущенной на эту сторону высоты.

А.Заславский

6. Куб с ребром $2n + 1$ разрезают на кубики с ребром 1 и бруски размера $2 \times 2 \times 1$. Какое наименьшее количество единичных кубиков может при этом получиться?

Т.Караева, А.Заславский

10 класс

1. В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведенными из двух вершин, и биссектрисой, проведенной из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.

Б.Френкин

2. Точки A' , B' , C' – основания высот остроугольного треугольника ABC . Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (точки K и A лежат по

одну сторону от BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO , где O – центр окружности, описанной около ABC .

В.Протасов

3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Точка C – произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q ; A, B – вторые точки пересечения прямых CP, CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ABC .

А.Заславский

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Точки C', D' симметричны ортоцентрам треугольников ABD и ABC относительно O . Докажите, что если прямые BD и BD' симметричны относительно биссектрисы угла B , то прямые AC и AC' симметричны относительно биссектрисы угла A .

А.Заславский

5. Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

А.Заславский

6. Даны две концентрические окружности. Каждая из окружностей b_1 и b_2 касается внешним образом одной окружности и внутренним – другой, а каждая из окружностей c_1 и c_2 касается внутренним образом обеих окружностей. Докажите, что 8 точек, в которых окружности b_1, b_2 пересекают c_1, c_2 , лежат на двух окружностях, отличных от b_1, b_2, c_1, c_2 . (Некоторые из этих окружностей могут вырождаться в прямые.)

В.Протасов

Заочный тур

1. Существует ли правильный многоугольник, в котором ровно половина диагоналей параллельна сторонам?

Б. Френкин

2. Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача, в зависимости от расположения окружностей?

В. Протасов

3. Треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Докажите, что один из его углов равен 60° .

А. Заславский

4. Биссектрисы двух углов вписанного четырехугольника параллельны. Докажите, что сумма квадратов двух сторон четырехугольника равна сумме квадратов двух других сторон.

Д. Шноль

5. Постройте квадрат $ABCD$, если даны его вершина A и расстояния от вершин B и D до фиксированной точки плоскости O .

Из Киевских олимпиад

6. На плоскости даны две концентрические окружности с центром в точке A . Пусть B – произвольная точка одной из этих окружностей, C – другой. Для каждого треугольника ABC рассмотрим две окружности одинакового радиуса, касающиеся друг друга в точке K , причем одна окружность касается прямой AB в точке B , а другая – прямой AC в точке C . Найдите геометрическое место точек K .

А. Мякишев

7. Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q . Точка S лежит на первой окружности, а прямые CP , CQ вторично пересекают

вторую окружность в точках A и B . Докажите, что

$$AB = PQ.$$

А.Заславский

8. а) Докажите, что при $n > 4$ любой выпуклый n -угольник можно разрезать на n тупоугольных треугольников.

б) Докажите, что при любом n существует выпуклый n -угольник, который нельзя разрезать меньше, чем на n тупоугольных треугольников.

в) На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать прямоугольник?

Т.Голенищева-Кутузова, Б.Френкин

9. Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D , проходят через середину диагонали AC . Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C , проходят через середину диагонали BD .

А.Заславский

10. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . Докажите, что проекции точек B и D на прямые IA и IC лежат на одной окружности.

А.Заславский

11. Даны четыре точки A, B, C, D . Известно, что любые две окружности, одна из которых проходит через A и B , а другая — через C и D , пересекаются. Докажите, что общие хорды всех таких пар окружностей проходят через одну точку.

А.Заславский

12. Имеется треугольник ABC . На луче BA отложим точку A_1 , так что отрезок BA_1 равен BC . На луче CA отложим точку A_2 , так что отрезок CA_2 равен BC . Аналогично построим точки B_1, B_2 и C_1, C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 параллельны.

А.Мякишев

13. Дан треугольник ABC . Внеписанная окружность касается его стороны BC в точке A_1 и продолжений двух других сторон. Другая внеписанная окружность касается стороны AC в точке B_1 . Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N . На луче AA_1 отметили точку P , такую что $AP = NA_1$.

Докажите, что точка P лежит на вписанной в треугольник окружности.

А.Мякишев

14. Прямая, соединяющая центр описанной окружности и точку пересечения высот неравностороннего треугольника, параллельна биссектрисе одного из его углов. Чему равен этот угол?

В.Протасов

15. Даны две окружности и не лежащая на них точка P . Проведите через P прямую, отсекающую на данных окружностях хорды равной длины.

М.Волчкевич

16. Даны две окружности. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B . Точки X , Y на окружностях таковы, что существует окружность, касающаяся данных в этих точках, причем одинаковым образом (внешним или внутренним). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AX и BY .

А.Заславский

17. Дан треугольник ABC и линейка, на которой отмечены два отрезка, равные AC и BC . Пользуясь только этой линейкой, найдите центр вписанной окружности треугольника, образованного средними линиями ABC .

А.Мякишев

18. Докажите, что для треугольника со сторонами a , b , c и площадью S выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(|a - b| + |b - c| + |c - a|)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

А.Абдуллаев, Азербайджан

19. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$. Первая окружность имеет центр в вершине A и проходит через D , вторая имеет центр в C и проходит через D . Произвольная окружность с центром B пересекает первую окружность в точках M_1 , N_1 , а вторую – в точках M_2 , N_2 . Чему равно отношение M_1N_1/M_2N_2 ?

В.Протасов

20. а) Многоугольник обладает следующим свойством: если провести прямую через две точки, делящие его периметр пополам, то эта прямая разделит многоугольник на два равновеликих

многоугольника. Верно ли, что многоугольник центрально симметричен?

б) Верно ли, что любая фигура, обладающая свойством, указанным в п.а), центрально симметрична?

А.Заславский

21. В треугольнике провели срединные перпендикуляры к его сторонам и измерили их отрезки, лежащие внутри треугольника.

а) Все три отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равносторонний?

б) Два отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равнобедренный?

в) Могут ли длины отрезков равняться 4, 4 и 3?

А.Заславский, Б.Френкин

22. а) Все вершины пирамиды лежат на гранях куба, но не на его ребрах, причем на каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

б) Все вершины пирамиды лежат в плоскостях граней куба, но не на прямых, содержащих его ребра, причем в плоскости каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

А.Хачатурян

23. В пространстве даны две пересекающиеся сферы разных радиусов и точка A , принадлежащая обеим сферам. Докажите, что в пространстве существует точка B , обладающая следующим свойством: если через точки A и B провести произвольную окружность, то точки ее повторного пересечения с данными сферами будут равноудалены от B .

В.Протасов

24. Пусть h – наименьшая высота тетраэдра, d – наименьшее расстояние между его противоположными ребрами. При каких t возможно неравенство $d > th$?

И.Богданов

Финальный тур

8 класс

1. Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

Б.Френкин

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и углом $A = 50^\circ$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$. Найдите CK/LB .

Ф.Нилов

3. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противоположных угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

Д.Шноль

4. Пусть CC_0 – медиана треугольника ABC , серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' , B' , прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1 . Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

Ф.Нилов, А.Заславский

5. Даны два треугольника ABC , $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC , проведенными из вершины A . Аналогично определим углы $\beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

А.Заславский

6. Рассматриваются треугольники, все вершины которых являются вершинами данного правильного 2008-угольника. Каких среди них больше: остроугольных или тупоугольных?

Б.Френкин

7. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом α при вершине. На отрезке AC во внешнюю сторону построена дуга с градусной мерой β . Две прямые, проходящие через вершину B , делят как отрезок, так и дугу AC на три равные части. Найдите α/β .

Ф.Нилов

8. На доске был нарисован выпуклый четырехугольник. Боря отметил центры четырех окружностей, каждая из которых касается одной стороны четырехугольника и продолжений двух соседних с ней. После чего Алеша стер четырехугольник. Сможет ли Боря определить, чему равнялся периметр четырехугольника?

Б.Френкин, А.Заславский

1. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

А.Заславский

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек таких, что отрезки, соединяющие их проекции на прямые, содержащие противоположные стороны четырехугольника, перпендикулярны.

Ф.Нилов

3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\sin \angle A}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin \angle B}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin \angle C}} \leq \sqrt{\frac{p}{r}},$$

где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности треугольника ABC .

Р.Пиркулиев

4. Пусть CC_0 – медиана треугольника ABC , серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c , B_c , прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1 . Аналогично определим точки A_1 , B_1 . Докажите, что окружность $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

Ф.Нилов, А.Заславский

5. Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками?

Н.Авилов

6. Постройте треугольник, если даны его центр тяжести и основания высоты и биссектрисы, проведенных к одной стороне.

Б.Френкин

7. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R . Через ортоцентр H этого треугольника провели другую окружность того же радиуса, пересекающую описанную окружность в точках X , Y . Точка Z – четвертая вершина параллелограмма $CXZY$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , B , Z .

А.Заславский

8. На окружности ω , описанной около треугольника ABC , взяты две точки P и Q . Серединный перпендикуляр l к отрезку PQ пересекает прямые BC , CA , AB в точках A' , B' , C' . Пусть A'' , B'' , C'' – вторые точки пересечения l с окружностями, описанными около треугольников $A'PQ$, $B'PQ$, $C'PQ$. Докажите, что прямые A'' , B'' , C'' пересекаются в одной точке.

J.L.Aime, Франция

10 класс

1. Вписанно-описанный n -угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких n это возможно?

Б.Френкин

2. Пусть $A_1B_1C_1$ – треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами внеписанных окружностей треугольника ABC .

А.Мякишев

3. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках X и Y , а третья окружность ω касается внутренним образом окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Отрезок XY пересекает окружность ω в двух точках M и N . Лучи PM и PN пересекают ω_1 в точках A и D , а лучи QM и QN пересекают ω_2 в точках B и C соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

В.Ясинский, Украина

4. На прямой l даны три точки C_0 , C_1 , C_2 . Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольники ABC , у которых сторона AB лежит на прямой l , а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C , совпадают с C_0 , C_1 , C_2 .

А.Заславский

5. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

И.Богданов

6. В треугольнике произведение двух сторон равно $8Rr$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что угол между ними меньше 60° .

Б. Френкин

7. На медианах AA' и BB' треугольника ABC построены в сторону вершины C дуги с одинаковой градусной мерой. Докажите, что общая хорда окружностей, содержащих эти дуги, проходит через C .

Ф. Нилов

8. Множество точек на плоскости таково, что из любых трех его точек найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1. Докажите, что это множество можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превосходит 1.

А. Акопян, В. Дольников

Заочный тур

1. Точки B_1 и B_2 лежат на луче AM , а точки C_1 и C_2 на луче AK . Окружность с центром O вписана в треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 . Докажите, что углы B_1OB_2 и C_1OC_2 равны.

Д. Прокопенко

2. Через каждую вершину неравнобедренного треугольника ABC проведен отрезок, разбивающий его на два треугольника с равными периметрами. Верно ли, что все эти отрезки имеют разные длины?

Б. Френкин

3. Биссектрисы углов трапеции образуют при пересечении четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что трапеция равнобокая.

Д. Шноль

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Из точки Q пустили в каждую из окружностей по одному лучу, которые отражаются от окружностей по закону «угол падения равен углу отражения». Точки касания траектории первого луча – A_1, A_2, \dots второго – B_1, B_2, \dots

Оказалось, что точки A_1, B_1 и P лежат на одной прямой. Докажите, что тогда все прямые A_iB_i проходят через точку P .

Д. Прокопенко

5. Дан треугольник ABC и построена внеписанная окружность с центром O , касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Точка O_1 симметрична точке O относительно прямой BC . Найдите величину угла A , если известно, что точка O_1 лежит на описанной около треугольника ABC окружности.

Д. Шноль

6. Найдите геометрическое место центров всех внеписанных окружностей прямоугольных треугольников, имеющих данную гипотенузу.

Б. Френкин

7. Дан треугольник ABC . Из вершин B и C опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соответственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания со вписанной окружностью.

В.Протасов

8. Многоугольник можно разрезать на две равные части тремя различными способами. Верно ли, что у него обязательно есть центр или ось симметрии?

С.Маркелов

9. На плоскости задано n точек, являющихся вершинами выпуклого n -угольника, $n > 3$. Известно, что существует ровно k равносторонних треугольников со стороной 1, вершины которых – заданные точки.

а) Докажите, что $k < \frac{2}{3}n$.

б) Приведите пример конфигурации, для которой $k > 0,666n$.

В.Ясинский, Украина

10. Пусть ABC – остроугольный треугольник, CC_1 – его биссектриса, O – центр описанной окружности. Точка пересечения прямой OC_1 с перпендикуляром из C на AB лежит на описанной окружности треугольника AOB .

Найдите угол C .

Ф.Ивлев

11. Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC , касается стороны CD , а окружность, описанная около треугольника ACD , касается стороны AB . Докажите, что диагональ AC меньше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD .

А.Блинков

12. В треугольнике ABC провели биссектрису CL . Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно CL , A_2 и B_2 симметричны точкам A и B относительно L . Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников AB_1B_2 и BA_1A_2 . Докажите, что углы O_1CA и O_2CB равны.

Д.Прокопенко

13. (9–10) В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности, основание высоты, опущенной на сторону AB , и центр внеписанной окружности, касающейся этой стороны и

продолжений двух других. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

А.Заславский

14. Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C . Найдите площадь треугольника AMC .

В.Протасов

15. Даны окружность и не лежащая на ней точка. Из всех треугольников, одна вершина которых совпадает с данной точкой, а две другие лежат на окружности, выбран треугольник наибольшей площади. Докажите, что он равнобедренный.

Б.Френкин

16. Три прямые проходят через точку O и образуют попарно равные углы. На одной из них взяты точки A_1, A_2 , на другой — B_1, B_2 , так что точка C_1 пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на третьей прямой. Пусть C_2 — точка пересечения A_1B_2 и A_2B_1 . Докажите, что угол C_1OC_2 прямой.

А.Заславский

17. Дан треугольник ABC и точки X, Y , не лежащие на его описанной окружности. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции X на BC, CA, AB , а A_2, B_2, C_2 — проекции Y . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на, соответственно, B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямая XY проходит через центр окружности, описанной около ABC .

А.Заславский

18. На плоскости даны три параллельные прямые. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников, вершины которых расположены (по одной) на этих прямых.

Б.Френкин

19. Дан выпуклый n -угольник $A_1 \dots A_n$. Пусть $P_i (i = 1, \dots, n)$ — такая точка на его границе, что прямая A_iP_i делит его площадь пополам. Дано, что все точки P_i не совпадают с вершинами и лежат на k сторонах n -угольника.

Каково наименьшее и наибольшее возможное значение k при каждом данном n ?

Б.Френкин

20. В остроугольном треугольнике ABC точка H – ортоцентр, O – центр описанной окружности, AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1 . Докажите, что H , O , C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

Д.Прокопенко

21. Дан четырехугольник $ABCD$, противоположные стороны которого пересекаются в точках P и Q . Две прямые, проходящие через эти точки, пересекают стороны четырехугольника в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей $ABCD$.

Ф.Нилов

22. Постройте четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность, по радиусам этих окружностей и углу между диагоналями.

А.Заславский

23. Верно ли, что при любом n правильный $2n$ -угольник является проекцией некоторого многогранника, имеющего не более чем $n + 2$ грани?

В.Протасов

24. Дана четырехугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на ребра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.

Ф.Нилов

Финальный тур

8 класс

1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна меньшему основанию BC , а диагональ AC равна основанию AD . Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC , пересекает прямую DC в точке M . Докажите, что AM – биссектриса угла BAC .

А.Блинов, Ю.Блинов

2. Через точку внутри вписанного четырехугольника провели две прямые, делящие его на четыре части. Три из этих частей – вписанные четырехугольники, причем радиусы описанных вокруг них окружностей равны. Докажите, что четвертая часть – четырехугольник, вписанный в окружность того же радиуса.

А.Блинов

3. Пусть AN_a и BH_b – высоты треугольника ABC , P и Q – проекции точки H_a на стороны AB и AC . Докажите, что прямая PQ делит отрезок H_aH_b пополам.

А.Акопян, К.Савенков

4. В треугольнике ABC $\angle A = 57^\circ$, $\angle B = 61^\circ$, $\angle C = 62^\circ$. Какой из двух отрезков длиннее: биссектриса угла A или медиана, проведенная из вершины B ?

Н.Белухов, Болгария

5. Из вершины B треугольника ABC опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C . Пусть K – точка касания вписанной окружности со стороной BC . Найдите угол MKB , если известно, что $\angle BAC = \alpha$.

В.Протасов

6. Можно ли расположить на плоскости четыре равных многоугольника так, чтобы любые два из них не имели общих внутренних точек, но имели общий отрезок границы?

С.Маркелов

7. Вокруг треугольника ABC описали окружность s . Пусть L и W – точки пересечения биссектрисы угла A со стороной BC и окружностью s соответственно. Точка O – центр описанной окружности треугольника ACL . Восстановите треугольник ABC , если даны окружность s и точки W и O .

Д.Прокопенко

8. Вписанная и невписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках M и N . Известно, что $\angle BAC = 2\angle MAN$. Докажите, что $BC = 2MN$.

Н.Белухов, Болгария

9 класс

1. Середина стороны треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой стороны с вписанной окружностью. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

А.Блинов, Ю.Блинов

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Обозначим через R_a , R_b , R_c и R_d радиусы описанных окружностей треугольников DAB , ABC , BCD , CDA . Докажите, что неравенство $R_a <$

$< R_b < R_c < R_d$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$180^\circ - \angle CDB < \angle CAB < \angle CDB.$$

О. Мусин

3. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E , лучи BC и AD – в точке F . Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB , CD и биссектрисой угла B , касается прямой AB в точке K , а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD , BC и биссектрисой угла B , касается прямой BC в точке L . Докажите, что прямые KL , AC и EF пересекаются в одной точке.

И. Богданов

4. Дан правильный 17-угольник $A_1 \dots A_{17}$. Докажите, что треугольники, образованные прямыми A_1A_4 , A_2A_{10} , $A_{13}A_{14}$ и A_2A_3 , A_4A_6 , $A_{14}A_{15}$, равны.

Н. Белухов, Болгария

5. На окружности отметили n точек. Оказалось, что среди треугольников с вершинами в этих точках ровно половина остроугольных. Найдите все значения n , при которых это возможно.

Б. Френкин

6. Дан треугольник ABC такой, что $AB - BC = \frac{AC}{\sqrt{2}}$. Пусть M – середина стороны AC , а N – основание биссектрисы угла B . Докажите, что

$$\angle BMC + \angle BNC = 90^\circ.$$

А. Акопян

7. Даны две пересекающиеся окружности с центрами O_1 , O_2 . Постройте окружность, касающуюся одной из них внешним, а другой внутренним образом, центр которой удален от прямой O_1O_2 на наибольшее расстояние.

М. Волчкевич

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Известно, что четыре окружности, каждая из которых касается его диагоналей и описанной окружности изнутри, равны. Верно ли, что $ABCD$ – квадрат?

С. Роговата, Румыния; А. Заславский

1. Пусть a , b , c — длины сторон произвольного треугольника; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}} + \sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}} + \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} \geq 6r.$$

Д.Швецов

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке K . Его диагонали пересекаются в точке L . Известно, что прямая KL проходит через центр тяжести четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

Ф.Нилов

3. Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r ; O , I — центры этих окружностей. Внешняя биссектриса угла C пересекает AB в точке P . Точка Q — проекция точки P на прямую OI . Найдите расстояние OQ .

А.Заславский, А.Акопян

4. Через вершины треугольника ABC проводятся три произвольные параллельные прямые d_a , d_b , d_c . Прямые, симметричные d_a , d_b , d_c относительно BC , CA , AB соответственно, образуют треугольник XYZ . Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей таких треугольников.

С.Рохоата, Румыния

5. В треугольник ABC вписан ромб $CKLN$ так, что точка L лежит на стороне AB , точка N — на стороне AC , точка K — на стороне BC . Пусть O_1 , O_2 и O — центры описанных окружностей треугольников ACL , BCL и ABC соответственно. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ANL и BKL , отличная от L . Докажите, что точки O_1 , O_2 , O и P лежат на одной окружности.

Д.Прокопенко

6. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, A_1 и B_1 — точки касания этой окружности со сторонами BC и AC , G — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Докажите, что угол CGI прямой тогда и только тогда, когда $GM \parallel AB$.

А.Заславский

7. Дано множество точек O, A_1, A_2, \dots, A_n на плоскости. Расстояние между любыми двумя из этих точек является квадратным корнем из натурального числа. Докажите, что существуют такие векторы \vec{x} и \vec{y} , что для любой точки A_i выполняется равенство $\overrightarrow{OA_i} = k\vec{x} + l\vec{y}$, где k и l — некоторые целые числа.

А. Глазырин

8. Можно ли вписать правильный октаэдр в правильный додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

Б. Френкин

ПЕРВАЯ ОЛИМПИАДА (2005)

Заочный тур

1. Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки рассматривается аналогично). Отметим точку R – вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью (рис.1).

Четырехугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому $\angle CDQ = \angle CPQ$, как опирающиеся на одну дугу. По этой же причине $\angle CDQ = \angle CDR = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны (соответственные углы равны). Но BR является диаметром, как следует из условия, поэтому $\angle BAR = 90^\circ$.

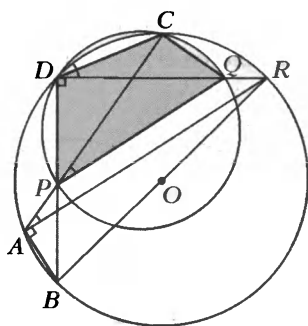


Рис. 1

2. Приведем некоторые из возможных разрезов (рис.2, а–в).

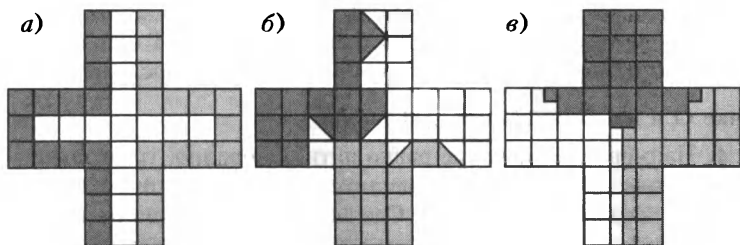


Рис. 2. а) А.Дарбинян¹; б) И.Бородулин; в) А.Макарец

¹ Здесь и ниже приводятся фамилии школьников, нашедших на олимпиаде решение, неизвестное жюри.

3. Искомым геометрическим местом будет окружность с центром в середине OK (где O – центр исходной окружности) и радиусом $\frac{R}{2}$ (где R – радиус данной окружности).

Первое решение. Действительно, пусть PQ – общая хорда, M – ее середина, а O_1 – центр выбранной произвольно окружности. Поскольку из условия следует, что $OP O_1 Q$ является ромбом, то M будет также серединой OO_1 . Средняя линия MM_1 треугольника KO_1 равна половине KO_1 , т.е., половине радиуса. Таким образом, все середины хорд лежат на окружности с центром в середине OK и радиусом $\frac{R}{2}$ (рис.3,а).

Несложно также проверить, что любая точка этой окружности является серединой некоторой хорды.

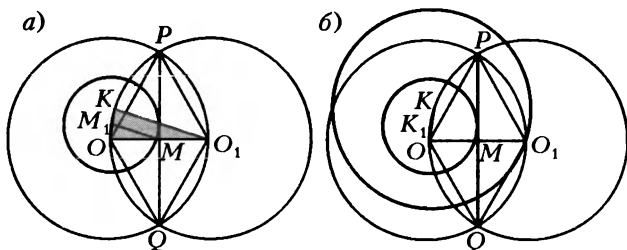


Рис. 3

Второе решение. Центры окружностей, равных данной и проходящих через точку K , лежат на окружности радиуса R с центром в точке K . Если O_1 – центр одной из таких окружностей, то, как уже было замечено, M – середина общей хорды – будет также серединой OO_1 . Поэтому искомое ГМТ есть образ окружности, образованной центрами, при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $\frac{1}{2}$ (рис.3,б).

4. Наименьшее значение равно пяти. Очевидно, треугольников с таким свойством не существует. Покажем, что не существует и четырехугольников. Сделать это можно по-разному. Например, так как синусы углов равны, то сами углы четырехугольника равны либо φ , либо $180^\circ - \varphi$. Простым перебором легко убедиться в том, что в этом случае мы имеем дело либо с прямоугольником, либо с параллелограммом, либо с равнобокой трапецией. Или же можно для доказательства использовать «метод площадей». Рассмотрим выпуклый четырехугольник,

синусы всех углов которого равны, и обозначим длины его сторон буквами a, b, c, d . Вычислим его площадь двумя способами как сумму площадей двух треугольников с общей диагональю по формуле «половина произведения сторон на синус угла между ними», затем в полученном равенстве сократим на половину синуса и придем к соотношению $ab + cd = ad + bc$, или $(a - c)(b - d) = 0$. Отсюда вытекает равенство по крайней мере одной пары сторон. Чтобы построить пятиугольник, обладающий искомыми свойствами, достаточно отрезать у равнобокой трапеции с углом 60° при большем основании «уголок» (рис.4).

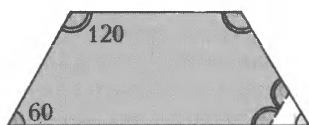


Рис. 4

Или же можно взять правильный пятиугольник с углами 108° и с его помощью построить пятиугольник, все стороны которого соответственно параллельны сторонам правильного пятиугольника, но не равны между собой (рис.5).

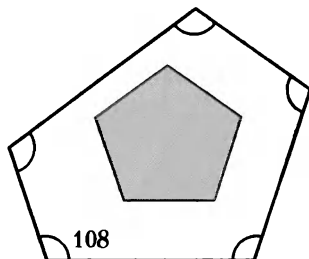


Рис. 5

5. Во всех случаях получится прямая с выколотой точкой, которая соответствует случаю, когда треугольник вырождается в отрезок (рис.6).

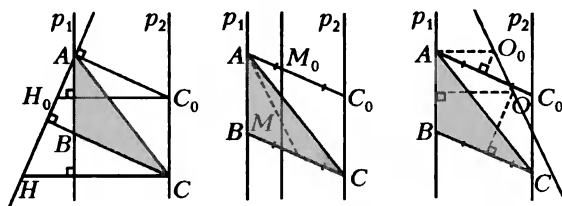


Рис. 6

В первом случае, очевидно, имеем прямую, перпендикулярную BC и проходящую через вершину A . Во втором случае ответом будет прямая, параллельная данным прямым и делящая отрезок с концами на этих прямых в отношении $1:2$, считая от первой прямой. В самом деле, отрезок BC движется с постоянной скоростью, значит, и его середина движется с постоянной скоростью. Точка пересечения медиан делит отрезок, соединяющий вершину A с серединой BC , в постоянном

ти) будет перемещаться по прямой. Можно также заметить, что эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AK , симметричному отрезку AC_0 (в который вырождается

Наконец, так как серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BC движутся также с постоянными скоростями, то и точка их пересечения (центр описанной окружности) движется по прямой. Можно также заметить, что серединным перпендикуляром к отрезку AC_0 (в который вырождается треугольник при совпадении точек A и B) относительно перпендикуляра из вершины A .

44

6. Покажем, что закрашенная часть составляет ровно половину площади всего треугольника. Для этого из точек B_1, \dots, B_n опустим перпендикуляры на сторону AC . Эти перпендикуляры являются высотами треугольников $C_i B_i C_{i+1}$ с одинаковыми основаниями, причем, как следует из соображений подобия, $h_i = i h_1$. Отсюда вытекает, что таким же соотношением будут связаны площади окрашенных треугольников: $S_i = i S_1$ (на рис.9 изображен случай $n = 4$).

Рис. 9

Рис. 10

Рис. 10

Первое решение. В данной конструкции окружность, проходящая через вершины B и C правильного треугольника и касающаяся в этих точках его сторон, будет также проходить и через общий центр двух окружностей (рис.10).

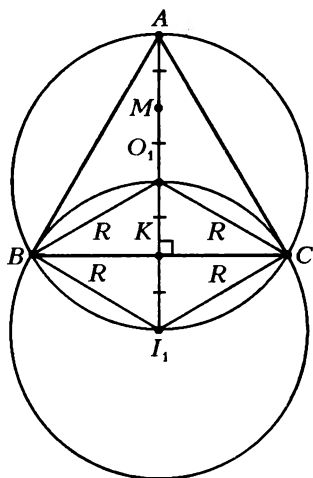


Рис. 11

Тогда точка K делит отрезок AI_1 в отношении 3:1, причем I_1K равен половине радиуса этой окружности (рис.11).

Теперь докажем основное утверждение (рис.12).

Проведем прямую AO и отметим точки P и Q ее пересечения с окружностью единичного радиуса. Точки M , O_1 и K делят отрезок AI_1 на четыре одинаковые части, каждая из которых равна $R/2$, где R – радиус окружности, касающейся сторон AB и AC в точках B и C . Мы хотим доказать, что $I_1O = R$. Из условия следует, что точки P и O делят отрезок AQ на три равные части, поэтому из теоремы, обратной теореме Фалеса, следует, что отрезки MP и KQ параллельны. Но $\angle PKQ$ прямой, как опирающийся на диа-

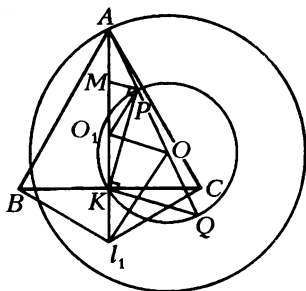


Рис. 12

метр, поэтому прямым будет и $\angle MPK$.

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $O_1P = O_1M = O_1K = \frac{R}{2}$. Теперь осталось только заметить, что отрезок O_1P является средней линией треугольника AI_1O и, значит, равен половине I_1O .

Из этого утверждения следует, что в случае «верхнего» (на рисунке) треугольника

$$\angle B_1OC_1 = \frac{1}{2} \angle B_1IC_1 = 60^\circ,$$

так как вписанный угол равен половине центрального. По той же причине для «нижнего» треугольника получим $\angle B_1OC_1 = 120^\circ$. Для доказательства самого утверждения воспользуемся следующим легко проверяемым свойством правильного треугольника. Пусть I_1 – центр окружности, касающейся сторон AB и AC правильного треугольника ABC в точках B и C соответственно, а K – середина

Второе решение. (М.Осечкина)

Рассмотрим, например, случай, когда точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC (рис.13).

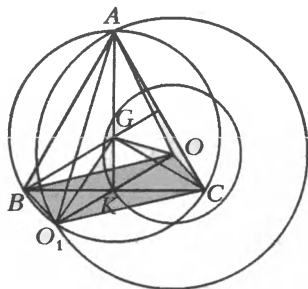


Рис. 13

Пусть K – середина BC , G – точка пересечения медиан треугольника ABC . Продолжим отрезок OK до пересечения с большей окружностью в точке O_1 . По условию, $BK = KC$, $OK = KO_1$, поэтому четырехугольник $BOCO_1$ является параллелограммом. Далее, заметим, что G будет также центроидом (точкой пересечения медиан) и треугольника AOO_1 , поскольку AK – медиана этого треугольника, и $AG : GK = 2 : 1$. И так как треугольник равнобедренный, то медиана OG является также биссектрисой, откуда следует равенство треугольников AGO и O_1GO . Следовательно, $GA = GO_1 = GB = GC$, т.е. точки A, B, C, O_1 лежат на одной окружности, а значит, $\angle BO_1C = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$. Аналогично рассматривая и второй случай, получим 120° .

Третье решение. (М.Лысов) Это, пожалуй, наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число λ . Тогда геометрическое место точек X , таких что $\frac{AX}{BX} = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q – точки, которые делят отрезок AB в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке PQ как на диаметре. Она называется окружностью Аполлония (рис.14).

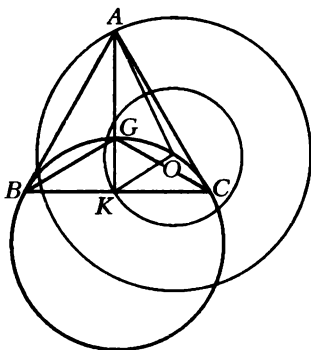


Рис. 14

Поскольку из условия нашей задачи сразу следует, что $AG/KG = AB/KB = AC/KC = AO/KO = 2$, отсюда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполлония для отрезка AK и $\lambda = 2$. Понятно также, что $\angle BGC = \angle BOC$ (или $180^\circ - \angle BOC$).

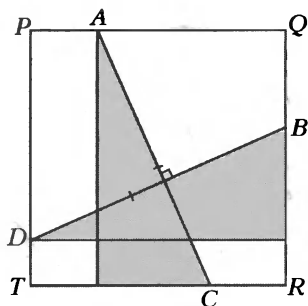


Рис. 15

8. Третий прямоугольник также будет квадратом. Доказательство основано на следующем свойстве квадрата. Пусть точки A и C лежат на одной паре противоположных сторон квадрата, а B и D — на другой. Тогда условия $AC \perp BD$ и $AC = BD$ являются равносильными (рис. 15).

Это сразу следует из равенства прямоугольных треугольников, показанных на рисунке. Проведем далее в нашем четырехугольнике, вписанном в два квадрата, из точки A прямую, перпендикулярную BD , и отметим ее точки пересечения с соответствующими сторонами квадратов: C_1 и C_2 (рис. 16).

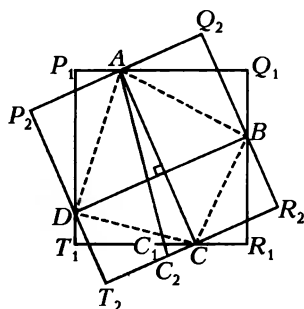


Рис. 16

Из указанного выше свойства квадрата вытекает, что $AC_1 = BD$ и $AC_2 = BD$, т.е. $AC_1 = AC_2$ и точки C_1 , C_2 должны совпадать. Но у двух сторон квадратов, содержащих эти точки, имеется только одна общая точка — C . Значит, построенный нами перпендикуляр совпадает с AC , и, следовательно, диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и перпендикулярны.

Очевидно, что если четырехугольник с таким свойством вписан в прямоугольник, то прямоугольник является квадратом.

9. В терминах векторов, нам нужно доказать, что $2\overline{PM} = \overline{PO}$. Как известно, если G — точка пересечения медиан некоторого треугольника ABC , то для произвольной точки P выполняется равенство: $3\overline{PG} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$. С учетом этого свойства, задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть имеется правильный треугольник ABC и произвольная точка P . Рассмотрим векторы \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} , а также три вектора $n_a(\overline{P})$, $n_b(\overline{P})$ и $n_c(\overline{P})$, начало каждого из которых расположено в точке P , а конец на основании перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону треугольника. Тогда

$$2(n_a(\overline{P}) + n_b(\overline{P}) + n_c(\overline{P})) = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}.$$

Для доказательства рассмотрим еще шесть векторов, каждый

из которых лежит на прямой, параллельной стороне треугольника и проходящей через точку P (рис.17).

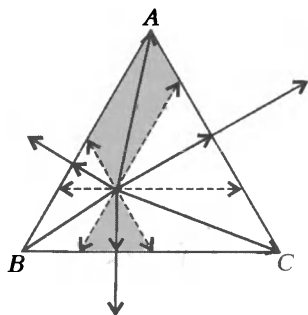


Рис. 17

Начало каждого такого вектора расположено в точке P , а конец на одной из сторон треугольника. (На рисунке изображен случай, когда точка P лежит внутри треугольника). Через эти векторы легко выразить как векторы, соединяющие P с вершинами, так и векторы с концами в основаниях перпендикуляров, поскольку параллельные линии разбивают треугольник на правильные треугольники и параллелограммы. Как видим, наше утверждение доказано. Легко также убедиться в том, что эти же рассуждения проходят и в случае, когда точка P расположена вне треугольника ABC .

10. Пусть $AB \neq AC$. Проведем отрезок $B'C'$ так, чтобы $\angle AC'B' = \angle ACB$ (рис.18).

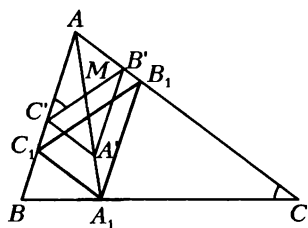


Рис. 18

Ясно, что треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, при этом $B'C'$ не параллелен BC . Отметим середину отрезка $B'C'$ — точку M , и построим треугольник $AB'C'$ до параллелограмма $AB'A'C'$. Далее найдем точку A_1 пересечения AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Отрезки A_1C_1 , B_1A_1 и B_1C_1 осуществляют искомое разрезание.

Замечание. В сущности, приведенное решение использует так называемую *симедиану* треугольника. Симедианой называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы угла треугольника, через вершину которого проходит медиана. Назовем параллелью (к стороне BC) треугольника любой отрезок PQ с концами на прямых AB и AC , параллельный BC . При этом, понятно, $\angle APQ = \angle ABC$ и $\angle AQP = \angle ACB$. Назовем антипараллелью (к стороне BC) треугольника любой отрезок RT с концами на прямых AB и AC , такой, что $\angle ART = \angle ACB$ и $\angle ATR = \angle ABC$. (Как несложно проверить, в частности, антипараллелью является отрезок, образованный основаниями соответствующих высот треугольника.) Очевидно, что отрезок является параллелью тогда и только тогда,

когда соответствующая медиана делит его пополам. Поскольку симметрия относительно прямой сохраняет углы и длины отрезков, из этого утверждения вытекает следующая лемма: *отрезок является антипараллелью тогда и только тогда, когда соответствующая симедиана делит его пополам* (рис.19).

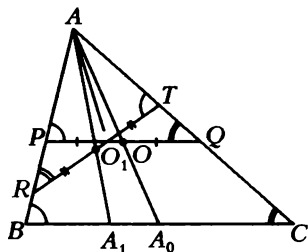


Рис 19

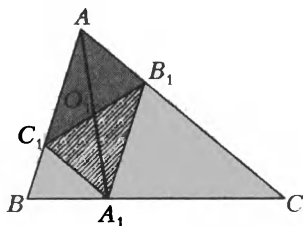


Рис 20

Теперь осуществим искомое разрезание (рис.20).

Допустим, что $AB \neq AC$. Пусть AA_1 – симедиана треугольника, A_1C_1 и A_1B_1 – параллели к сторонам AC и AB соответственно. Поскольку $A_1C_1AB_1$ – параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, т.е. середина C_1B_1 лежит на симедиане, и потому, согласно лемме, отрезок C_1B_1 является антипараллелью. Легко проверить, что треугольники $A_1B_1C_1$, AB_1C_1 , C_1BA_1 и B_1A_1C подобны треугольнику ABC и не все одинаковы (так как, понятно, для неравнобедренного треугольника основание симедианы A_1 не совпадает с серединой BC . Можно даже показать, что $BA_1/CA_1 = AB^2/AC^2$ – еще одно интересное свойство симедианы).

11. Наименьшее значение $n = 5$. Покажем сначала, что никакой прямоугольник (в частности, квадрат) нельзя разрезать ни на 2, ни на 3, ни на 4 прямоугольника с различными сторонами. Очевидно, что если прямоугольник разрезан на 2 прямоугольника, то у них есть общая сторона. Пусть, далее, прямоугольник разрезан на 3 прямоугольника. Тогда один из них содержит две вершины исходного прямоугольника (так как три прямоугольника должны накрыть все 4 вершины исходного), и мы свели задачу к предыдущему случаю (оставшаяся часть – прямоугольник, который необходимо разбить на два).

Наконец, допустим, что прямоугольник разрезан на 4 других. Имеем две возможности – либо один из прямоугольников разбиения содержит две вершины исходного (и мы сводим задачу к разрезанию прямоугольника на 3 части), либо каждый из прямоугольников разбиения содержит по 1 вершине

исходного. В последнем случае рассмотрим 2 прямоугольника, содержащие соседние вершины (рис.21).

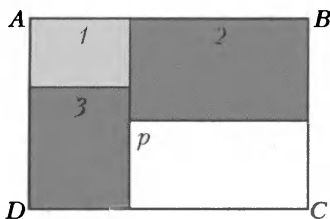


Рис. 21

Они должны соприкасаться (так как очевидно, что если бы был «зазор» между ними, то его нельзя было бы покрыть двумя прямоугольниками, содержащими остальные две вершины исходного). Рассмотрим тот прямоугольник из оставшихся, который содержит точку P . Он не может содержать вершину C , следовательно, он содержит вершину D и, значит, имеет общую сторону с первым прямоугольником.

Предъявим теперь одно из возможных разрезов квадрата на 5 различных прямоугольников (рис.22).

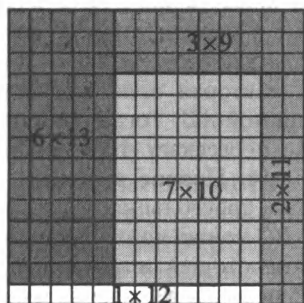


Рис. 22

12. Пусть $ABCD$ – искомый четырехугольник, P, Q, R, S, X, Y – середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC, BD соответственно. Так как QX, SY – средние линии треугольников ABC и ABD , то $QX = YS = a/2$. Аналогично, $QY = XC = c/2$. Следовательно, зафиксировав точки X и Y и построив треугольники XYQ и XYS , мы найдем точки Q и S . Аналогично находятся точки P и R . Проведя теперь через P, Q, R, S прямые, параллельные, соответственно, QX, PX, QY, PY , получим искомый четырехугольник (рис.23).

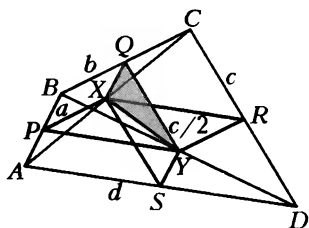


Рис. 23

13. Пусть P – точка пересечения перпендикуляров к AC в точке E и к BC в точке F . Когда D движется по AB , стороны четырехугольника $DEPF$ сохраняют направления, и, так как три вершины четырехугольника движутся по прямым, четвертая также движется по прямой. Следовательно, середина отрезка CP , являющаяся центром описанной окружности треугольника CEF , также движется по прямой (рис.24). Значит, все эти окружности имеют общую хорду, т.е., помимо C , еще одну общую точку Q .

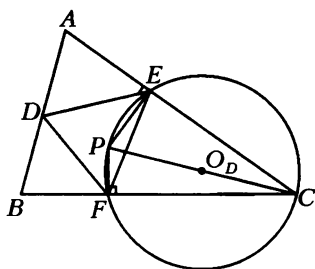


Рис. 24

Поскольку хорда EF стягивает постоянный угол C , то ее длина будет минимальной при минимальном радиусе описанной около CEF окружности. Однако среди всех окружностей, содержащих общую хорду, минимальный радиус, очевидно, будет иметь та из них, для которой эта хорда CQ является диаметром.

Отсюда вытекает, например, следующий способ построения точки D .

Проведем через A прямую, параллельную l_2 , и найдем точку U ее пересечения с BC . Через B проведем прямую, параллельную l_2 , и найдем точку V ее пересечения с AC . Пусть Q – вторая точка пересечения окружностей, описанных около ACU и BCV , E – вторая точка пересечения окружности с диаметром CQ и прямой AC . Тогда прямая, проходящая через E и параллельная l_1 , пересекает AB в искомой точке.

14. Первое решение. Назовем треугольник $A_1B_1C_1$ чевианным треугольником точки P . Оказывается, любой треугольник ABC можно подходящим аффинным преобразованием перевести в некоторый остроугольный треугольник $A'B'C'$, так что точка P переходит в его ортоцентр, а чевианный треугольник P – в ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями высот; рис.25).

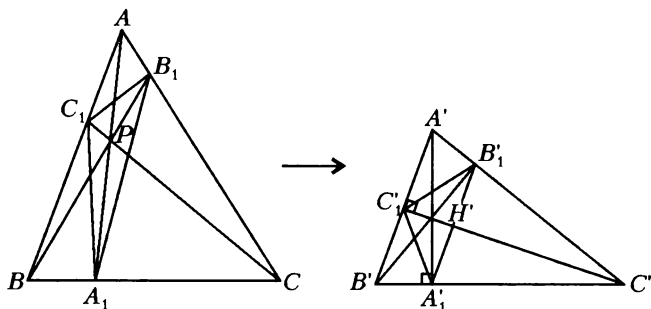


Рис. 25

Действительно, возьмем произвольный отрезок $B'C'$ и отметим на нем такую точку A'_1 , что $B'A'_1/A'_1C' = BA_1/A_1C$, а затем восставим в этой точке перпендикуляр к $B'C'$. На этом перпендикуляре построим точку A_0 такую, что $\angle B'A_0C' = \frac{\pi}{2}$ (точка

пересечения перпендикуляра с окружностью, построенной на $B'C'$, как на диаметре, рис.26).

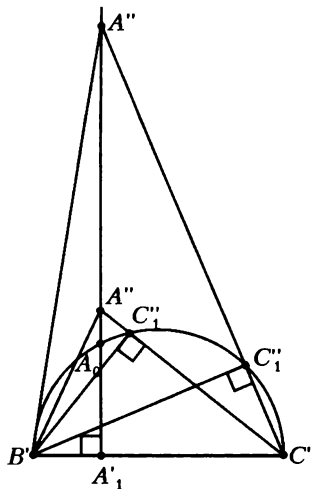


Рис. 26

Далее, рассмотрим точку A'' на этом перпендикуляре и опустим высоту $B'B_1''$ на $A''C'$. Если A'' расположена близко к точке A_0 , то отношение $C'B_1''/B_1''A''$ очень велико, а если A_0 удаляется по перпендикуляру на бесконечность, то это отношение стремится к нулю. Из соображений непрерывности следует, что найдется некоторая точка A' на перпендикуляре, такая что $C'B_1''/B_1''A' = CB_1/B_1A$. Соответственное равенство третьей пары отношений гарантировано теоремой Чебы. Как известно, для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, отображающее первый треугольник на второй. Поскольку аффинное преобразование прямые переводит в прямые, а также сохраняет отношение длин отрезков, мы нашли аффинное преобразование, переводящее чевианный треугольник в некоторый ортотреугольник. Кроме того, аффинное преобразование сохраняет и отношение площадей. Сказанное означает, что нам достаточно доказать утверждение задачи для остроугольного треугольника и его ортоцентра. Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно равны S_1 , S_2 и S_3 . Эти треугольники подобны исходному с коэффициентами $\cos \angle A$, $\cos \angle B$, $\cos \angle C$ соответственно, поэтому, поскольку все углы острые, косинусы положительны и убывают. Из последней цепочки неравенств следует, что $\angle C \leq \frac{\pi}{3} \leq \angle A$. Докажем теперь, что $\sqrt{S_1 S_2} \leq S$.

После возведения в квадрат и деления числителя и знаменателя на S^2 получим

$$\frac{\cos^2 \angle A \cos^2 \angle B}{(1 - \cos^2 \angle A - \cos^2 \angle B - \cos^2 \angle C)^2} \leq 1.$$

Но, как нетрудно проверить, в любом треугольнике имеет место равенство:

$$1 - \cos^2 \angle A - \cos^2 \angle B - \cos^2 \angle C = 2 \cos \angle A \cos \angle B \cos \angle C,$$

поэтому наше неравенство равносильно $\frac{1}{4} \leq \cos^2 \angle C$, т.е. $\angle C \leq \frac{\pi}{3}$.

Аналогично доказывается, что $\sqrt{S_2 S_3} \geq S$.

Второе решение. Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно равны S_1 , S_2 и S_3 (рис.27).

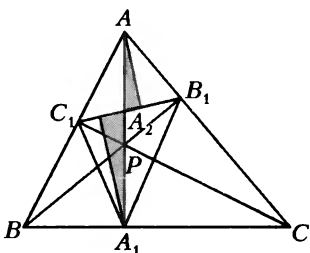


Рис. 27

Пусть точка P имеет (относительно треугольника ABC) нормированные барицентрические координаты (p, q, r) , т.е. $p + q + r = 1$. Поскольку P расположена внутри треугольника, то p, q, r — положительные величины. Выразим через них S_1/S . Обозначим через A_2 точку пересечения B_1C_1 и AA_1 . Поскольку треугольники AB_1C_1 и

$A_1B_1C_1$ имеют общее основание, то, очевидно, $S_1/S = AA_2/A_1A_2$. Далее, понятно что A_2 имеет координаты $(2p : q : r)$ (центр масс системы $2pA$ и $(q+r)A_1$ расположен на прямой AA_1 , а системы $(p+q)C_1$ и $(p+r)B_1$ — на прямой B_1C_1), откуда по правилу рычага имеем $AA_2/A_1A_2 = (q+r)/2p = (1-p)/2p$. Совершенно аналогично, $S_2/S = (1-q)/2q$ и $S_3/S = (1-r)/2r$. Поскольку $S_1 \leq S_2 \leq S_3$, отсюда следует, что $p \geq q \geq r$. С учетом равенства $p + q + r = 1$ имеем также $p \geq \frac{1}{3} \geq r$. Докажем теперь, что $\sqrt{S_1 S_2} \leq S$.

Подставляя полученные выше значения отношений, получаем $(1-p)(1-q) \leq 4pq$, т.е. $r \leq 3pq$. Но $\frac{pq}{r} \geq \frac{1}{3} \frac{q}{r} \geq \frac{1}{3}$. Точно так же доказывается, что $\sqrt{S_2 S_3} \geq S$ (используя неравенство $r \leq \frac{1}{3}$).

Замечание. Идеи, на которых основывалось доказательство, можно реализовать, не используя геометрию масс. Например, ввести отношения $\alpha = BA_1/CA_1$, $\beta = CB_1/AB_1$, $\gamma = AC_1/BC_1$ и с помощью теоремы Фалеса (проводя соответствующие параллели) выразить через них отношения площадей.

Третье решение. (Е.Авксентьев) Следующее симпатичное решение основано на так называемой теореме Мёбиуса. Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC . Обозначим через A_1 , B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP , BP и CP

соответственно со сторонами BC , CA , AB , а площади треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C и $A_1B_1C_1$ — через S_1 , S_2 , S_3 и S соответственно. Тогда $S^3 + (S_1 + S_2 + S_3)S^2 - 4S_1S_2S_3 = 0$. (Это несложно доказать, используя, например, найденные нами отношения площадей в предыдущих рассуждениях.) Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = x^3 + (S_1 + S_2 + S_3)x - 3S_1S_2S_3.$$

По теореме Мёбиуса $\Phi(S) = 0$. Кроме того, очевидно, что $\Phi(x)$ возрастает на $(0; +\infty)$ (как сумма двух возрастающих функций).

Поэтому нам достаточно показать, что $\Phi(\sqrt{S_1S_2}) \leq 0 \leq \Phi(\sqrt{S_2S_3})$. Но

$$\Phi(\sqrt{S_1S_2}) = S_1S_2(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3),$$

а

$$\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3 \leq \frac{3}{2}(S_1 + S_2) - 3S_3 \leq 0$$

(среднее геометрическое двух положительных величин не превосходит их среднего арифметического). Второе неравенство доказывается аналогично.

15. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в начале координат, коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и углом поворота $\frac{\pi}{4}$. Если квадрат радиуса данной окружности — четное число, то все ее целые точки переходят в целые, и мы получаем искомую окружность. Если квадрат радиуса — нечетное число, то все целые точки переходят в центры единичных квадратов с вершинами в целых точках, и искомая окружность получается после переноса на вектор $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Это достаточно очевидно из наглядных соображений — на рисунке 28 изображено действие на целочисленную решетку сначала сжатием, а потом поворотом.

Чисто формально, точка с координатами $(x; y)$ под действием указанных поворота и растяжения переходит в точку с координатами $(x' = \frac{x-y}{2}; y' = \frac{x+y}{2})$. Если квадрат

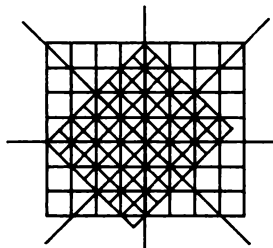


Рис. 28

радиуса – четное число, то x и y одной четности, поэтому x' , y' – целые и $x'^2 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} = R^2/2$. Если же квадрат радиуса – число нечетное, то четность x и y различна, поэтому после сдвига на вектор $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ получим целую точку $(x''; y'')$ и $\left(x'' - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y'' - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2}$.

16. Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами при основании, равными $\arccos \frac{1}{4}$. Пусть ABC – исходный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB соответственно. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны относительно общего центра тяжести M (с коэффициентом $-\frac{1}{2}$), а центр O описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$, точка M лежит на отрезке OH (H – ортоцентр треугольника ABC) и $HM = 2MO$ (прямая, содержащая эти три центра, называется *прямой Эйлера* треугольника ABC).

Поэтому если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на одной прямой с тремя остальными точками, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC . Отметим, что эта прямая проходит не более чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, что точки A и B не лежат на ней. Так как $\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C$, BI является биссектрисой угла HBO . Значит, точка I лежит на отрезке OH , причем $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, получим, что $AO = 2AH$. Таким образом, $AH = BH = R/2$, где R – радиус описанной около ABC окружности. Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в начале решения, следует также, что $AH = 2OA_1$ (и эти отрезки параллельны). Понятно, кроме того, что $OA_1 = R \cos \angle A$. Поэтому $AH = 2R \cos \angle A$ и $\cos \angle A = \frac{1}{4}$. Точно так же доказывается, что $\cos \angle B = \frac{1}{4}$.

17. Согласно известной теореме Штейнера, если на плоскости фиксирована окружность с отмеченным центром, то одной линейкой можно построить все то же самое, что и линейкой с

циркулем. Но применение стандартных методов, не учитывающих особенностей заданной в условии конструкции, требует изрядного количества «шагов». Естественно, требовалось при построении ограничиться минимальным количеством линий. Оказывается, можно обойтись всего лишь четырьмя! Сразу заметим, что если $AB = AC$, то построение очевидно (K совпадает с точкой, диаметрально противоположной точке P), и будем рассматривать случай, когда $AB \neq AC$.

Построение: 1. Проведем прямую BC . 2. Проведем прямую QR и отметим точку T пересечения этой прямой с прямой BC . 3. Построим точку P_d , диаметрально противоположную точке P . 4. Проведем прямую P_dT и отметим точку K — вторую точку пересечения этой прямой с вписанной окружностью. Точка K и есть искомая (рис. 29).

Доказательство: Понятно, что точка T будет делить отрезок BC в том же отношении, что и точка P (по теоремам Чева и Менелая). Пусть

интересующая нас окружность построена. Тогда KP — биссектриса угла BKC (по известной лемме Архимеда: *пусть прямая пересекает данную окружность в точках B и C ; рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке K , а прямой BC в точке P ; тогда прямая KP проходит через середину одной из двух дуг BC*).

По свойству биссектрисы, $BP/CP = KB/KC = \lambda \neq 1$. Поэтому точка K лежит на окружности Аполлония (см. решение задачи 7, способ 3) для отрезка BC с отношением λ , построенной на PT как на диаметре, т.е. $\angle TKP = 90^\circ$ или, что то же, $\angle PKP_d = 90^\circ$. Из этих рассуждений следует обоснование нашего построения.

18. Первое решение. Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера. (Напомним, что окружностью Эйлера треугольника ABC называют окружность, описанную около его серединного треугольника, т.е. проходящую через середины его сторон. На этой окружности также лежат основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами.) Пусть ABC — треугольник, образованный прямыми l_i , H — его ортоцентр. Тогда середины O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_1 совпадают с серединами отрезков $АН$, $ВН$, $СН$ (в

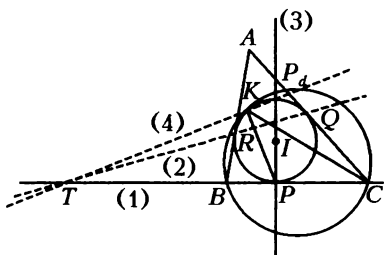


Рис. 29

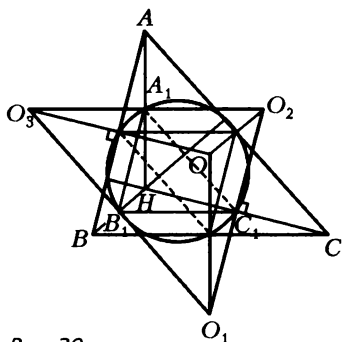


Рис. 30

Поскольку стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен ABC . Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2 , параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB , т.е. совпадает с высотой треугольника ABC , а H является центром гомотетии ABC и $A_1B_1C_1$ (рис.30).

Пусть, далее, M – произвольная точка, D – середина M_1M_2 . Тогда $\overline{DC_1} = (\overline{DO_1} + \overline{DO_2})/2$ и, так как $\overline{M_1O_1}$ и $\overline{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на угол $2\angle C$, $\overline{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный $\angle C$. Кроме того, $\overline{M_1O_1}$ и $\overline{M_2O_2}$ переходят в \overline{MO} при симметрии относительно CB и CA , соответственно, поэтому $\overline{DC_1}$ и \overline{MO} образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$, рис.31).

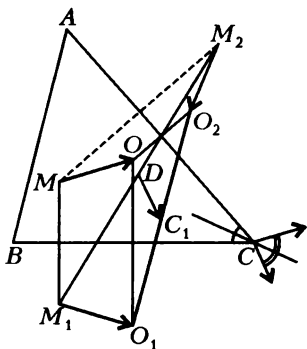


Рис. 31

Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным

OM . В заключение воспользуемся следующей классической теоремой планиметрии. *Тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны.*

(Несложное доказательство использует простой подсчет углов).

Согласно этой теореме, тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности, т.е. на окружности Эйлера исходного треугольника.

Второе решение. (Е.Авксентьев) Итак, ABC – треугольник, образованный прямыми l_i , H – его ортоцентр и A' , B' , C' – основания высот, опущенных на стороны BC , CA , AB , соответственно. Дадим теперь следующее определение: Пусть имеются две подобные фигуры Ψ_1 и Ψ_2 и некоторое преобразование подобия \mathcal{H} , переводящее одну фигуру в другую. Скажем, что две фигуры Φ_1 и Φ_2 одинаково расположены относительно Ψ_1 и Ψ_2 , если преобразование \mathcal{H} также переводит Φ_1 в Φ_2 . Теперь докажем, что точки M'_1 (середина M_3M_2) и M одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$ и ABC (как известно, эти треугольники подобны с коэффициентом $\frac{1}{\cos \angle A}$,

причем подобие это можно представить как композицию осевой симметрии относительно биссектрисы угла A и гомотетии с центром в A – см. замечание к решению задачи 10). Для этого достаточно показать, что $AM'_1 = AM/\cos \angle A$ (отношение расстояния от отрезка до его образа равно коэффициенту подобия) и что отношение расстояний от точки M'_1 до AB и AC обратно пропорционально отношению расстояний от M до тех же сторон (т.е. прямая AM'_1 при симметрии относительно биссектрисы угла A переходит в прямую AM ; рис.32).

Так как M'_1Q – средняя линия треугольника M_2MM_3 , то она перпендикулярна AB . Из тех же соображений M'_1P перпендикулярна AC , поэтому M'_1 – ортоцентр треугольника APQ , а значит, $AM'_1 = 2\rho \cos \angle A$, где ρ – радиус окружности, описанной

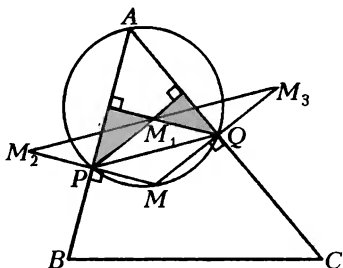


Рис. 32

около APQ (как было показано в решении задачи 16). Очевидно, что $\rho = AM'_1/2$. Равенство же обратных отношений до сторон вытекает из подобия закрашенных на рисунке треугольников. Точно так же доказывается, что M'_2 и M одинаково расположены относительно $A'B'C'$ и ABC , а M'_3 и M – относительно $A'B'C$ и ABC . Теперь, если в качестве M мы выберем точку O – центр описанной около ABC окружности, то, очевидно, точки

O'_1, O'_2, O'_3 будут серединами отрезков, соединяющих ортоцентр H треугольника ABC с его вершинами. (Поскольку прямые, соединяющие вершину треугольника с H и O , симметричны относительно соответствующей биссектрисы, — факт, с которым мы уже сталкивались при решении задачи 16, — и потому, например, точка O'_1 лежит на прямой AH . Кроме того, $AO = R$ и $AH = 2R \cos \angle A$, значит, $AO'_1 = AH/2$ и т.д.) Из доказанной нами одинаковой расположенности следует, что прямые $O'_1M'_1, O'_2M'_2$ и $O'_3M'_3$ одинаково расположены относительно треугольников $AB'C', A'BC'$ и $A'B'C$ (рис. 33).

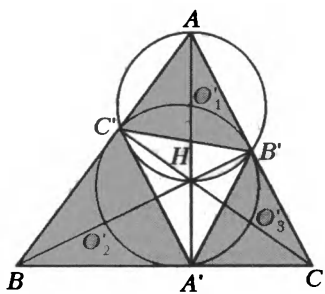


Рис. 33

Кроме того, понятно (ведь при подобии треугольников соответственные элементы переходят в соответственные, и, значит, центры описанных окружностей друг в друга), что и прямые O'_1A', O'_2B'

и O'_3C' одинаково расположены относительно тех же треугольников, причем все эти точки находятся на одной окружности — окружности Эйлера треугольника ABC . Наконец, отсюда заключаем, что углы между парами $O'_1M'_1$ и $O'_1A', O'_2M'_2$ и $O'_2B', O'_3M'_3$ и O'_3C' одинаковы.

Таким образом, мы показали, что прямые $O'_1M'_1, O'_2M'_2$ и $O'_3M'_3$ пересекаются в одной точке, расположенной на окружности Эйлера исходного треугольника.

19. а) Из любой точки внутри лунной орбиты можно допрыгнуть до любой другой точки внутри лунной орбиты за два прыжка. Для этого оба раза надо прыгнуть относительно Луны, сначала в момент, когда Луна находится в точке L_1 , а второй раз — когда Луна в точке L_2 . После двух прыжков летающая тарелка переместится на вектор $2\overline{L_1L_2}$.

Для любых двух точек X и Y внутри орбиты можно найти хорду L_1L_2 , такую что $\overline{XY} = 2\overline{L_1L_2}$. Эту хорду можно, например, построить, проведя диаметр, параллельный XY , и отложить на нем отрезок длиной $XY/2$, середина которого совпадает с центром окружности, а затем из концов этого отрезка провести перпендикуляры, которые и отсекут искомую хорду.

А можно рассмотреть гомотетии с центрами в точках X и Y и коэффициентом 2. Образы лунной орбиты при этом должны пересечься, поскольку если радиус лунной орбиты R и центры образов O_x, O_y , то $O_xO_y < XY + 2(XZ + YZ) < 4R$ (рис.34).

б) Пусть начальное положение Луны — L_0 , конечное — L_1 . Будем рассматривать пару прыжков сначала относительно Земли, а потом относительно Луны как двойной прыжок. При этом тарелка перемещается на вектор $2\overline{ZL}$, конец этого вектора — точка T — будет лежать на дуге окружности t_0t_1 с центром в Z и радиусом вдвое большим, чем радиус орбиты Луны. Будем такие вектора в дальнейшем обозначать просто \overline{T} . Мы прыгаем мгновенно, значит, в любой момент времени мы можем прыгнуть на целое число прыжков $k\overline{T}$ (чтобы прыгнуть на вектор $-\overline{T}$, сначала надо прыгнуть относительно Луны, а потом относительно Земли). Теперь, чтобы из точки X попасть в точку Y , надо представить вектор \overline{XY} как конечную сумму векторов, состоящих из слагаемых вида $k_i\overline{T}_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$, а T_i — некоторый набор точек на дуге t_0t_1 , расположенных последовательно друг за другом (рис.35).

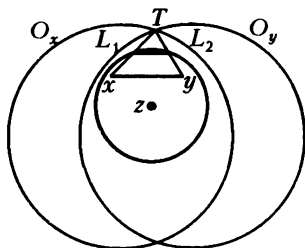


Рис. 34

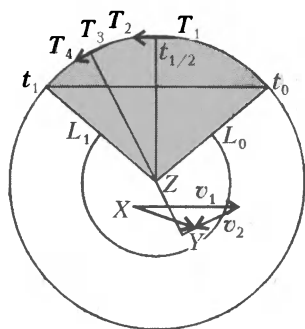


Рис. 35

Сначала представим \overline{XY} в виде суммы $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, так чтобы оба этих вектора были бы перпендикулярны некоторым радиусам нашего сектора. Это можно сделать, положив $\vec{v}_1 = \lambda(\vec{t}_1 - \vec{t}_0)$, $\vec{v}_2 = \overline{XY} - \vec{v}_1$. Поскольку \vec{v}_1 перпендикулярен «серединному» радиусу при всех значениях λ и при увеличении λ по модулю \vec{v}_2 стремится к $-\vec{v}_1$, то при достаточно большом λ \vec{v}_2 также будет перпендикулярен некоторому радиусу. Очевидно, что найдутся достаточно большие по модулю целые m_1 и m_2 и некоторые точки на дуге T_1, T_2, T_3, T_4 , расположенные последовательно и такие, что $\vec{v}_1 = m_1(\vec{T}_2 - \vec{T}_1)$ и $\vec{v}_2 = m_2(\vec{T}_3 - \vec{T}_4)$. Искомое представление получено.

20. Пусть R, r — радиусы описанной и вписанной сфер $ABCD$, O — центр описанной сферы $ABCD$, L — центр описанной окружности треугольника ABC , H — проекция I на плоскость ABC . Из условия следует, что O и D' лежат на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через L , поэтому прямые OD' и

IH параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около $IABC$), $OA = R$, $IH = r$.

Дважды применим теорему косинусов – к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O \cos \angle AD'O,$$

$$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O \cos \angle ID'O.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$R^2 - OI^2 = 2D'O(D'A \cos \angle AD'O - D'I \cos \angle ID'O).$$

Следовательно, $D'O = (R^2 - IO^2)/2r$. Аналогично доказывается, что и точки A' , B' , C' удалены от O на такое же расстояние. Таким образом, сферы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ концентричны (т.е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ – радиус сферы, описанной около $A'B'C'D'$. Докажем, что $\rho > R$. Для этого проведем плоскость DOI . Она пересекает описанную и вписанную сферу по окружностям с центрами O , I и радиусами R , r , а тетраэдр – по некоторому треугольнику. Вершина D этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности.

Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1 . Будем теперь «раздувать» меньшую окружность, сохраняя центр и увеличивая радиус. Из соображений непрерывности следует, что наступит момент, когда «раздутая» окружность (некоторого радиуса r') будет вписана в треугольник $DX'Y'$, образованный парой касательных с вершиной в D . Этот же треугольник будет вписан в большую окружность, поэтому для него выполняется классическое соотношение, выражающее расстояние между центрами вписанной и описанной окружности через их радиусы (так называемая *формула Эйлера*):

$$OI' = R^2 - 2Rr'.$$

Следовательно, $r' = (R^2 - OI'^2)/2R$. Понятно также, что $r' > r$. Задача решена.

21. а) Рассмотрим развертку тетраэдра в виде правильного треугольника и докажем, что кратчайший путь из его центра в любую точку будет на этой развертке отрезком. Пусть O – центр грани ABC , X – точка на грани ABD и некоторый путь из O в X пересекает сначала ребро AC . Если продолжить этот путь на

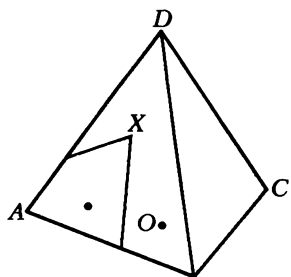
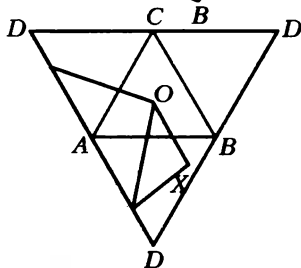


Рис. 36



развертке, мы попадем в некоторую точку на ребре AD . Но в эту точку ведет и симметричный путь через ребро AB , через которое в X можно попасть напрямую (рис.36).

Поэтому площадь, которую накроет цунами, есть разность между площадью круга радиу-

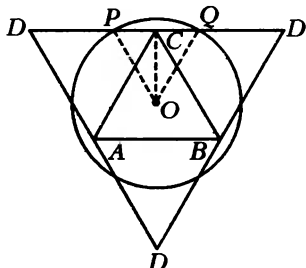


Рис. 37

сом 600 км и утроенной площадью сегмента (рис.37).

$$\cos \angle POC = \frac{OC}{OP} = \frac{900}{600\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит, $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$.

Площадь сегмента есть разность площадей сектора и треугольника:

$$S_{\text{seg}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 600^2.$$

Следовательно, площадь цунами

$$\pi \cdot 600^2 - \frac{3}{2} \cdot 600^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 180000\pi + 270000\sqrt{3}.$$

б) Рассматривая «двойную» развертку тетраэдра и рассуждая как в предыдущем случае, убеждаемся в том, что кратчайшие пути лежат внутри закрашенного прямоугольника (рис.38).

Площадь, которую накроет цунами, есть разность площади круга и удвоенной площади

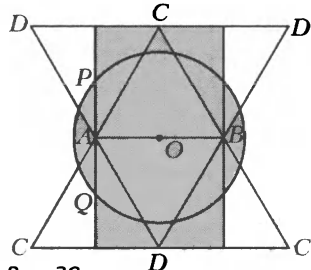


Рис. 38

сегмента:

$$\angle POA = \arccos \frac{OA}{OP} = \arccos \frac{3}{4};$$

$$PQ = 2PO \sin \angle POA = 300\sqrt{7};$$

$$S_{\text{seg}} = 2 \cdot 180000 \arccos \frac{3}{4} - 67500\sqrt{7};$$

$$S = \pi \cdot 600^2 - 720000 \arccos \frac{3}{4} + 135000\sqrt{7} = \\ = 720000 \arcsin 34 + 135000\sqrt{7}.$$

22. Пусть $ABCD$ – данный тетраэдр, A', B', C', D' – центры тяжести граней BCD, CDA, DAB, ABC . Оказывается, грани тетраэдра, образованного центроидами, параллельны соответственным граням исходного тетраэдра. Так, например, плоскость ABC параллельна плоскости $A'B'C'$ и т.д.

Действительно, пусть точки P и Q – середины AC и AB . Так как центроид делит медиану в отношении 2:1, то по теореме, обратной теореме Фалеса, $B'C' \parallel PQ$. Но $PQ \parallel BC$ как средняя линия, следовательно, $B'C' \parallel BC$. Точно так же, $A'C' \parallel AC$ и, по признаку параллельности двух плоскостей, грани параллельны. Поэтому перпендикуляры, восстановленные из точек A', B', C', D' к соответствующим граням $ABCD$, являются высотами тетраэдра $A'B'C'D'$. По теореме о трех перпендикулярах их проекции на плоскость грани $A'B'C'$ являются высотами этой грани и, значит, пересекаются в одной точке. Но тогда их проекции на параллельную плоскость ABC также пересекаются в одной точке.

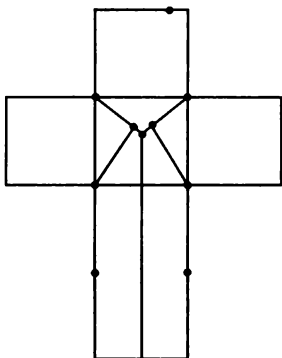


Рис. 39

23. Например, это можно сделать следующим образом, рассмотрев развертку куба, показанную на рисунке 39.

24. Первое решение. Пусть ABC – данный треугольник. Построим на каждой его стороне во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол φ . Покажем, что на дугах BC, CA, AB найдутся точки X, Y, Z соответственно, такие что $AZ = AY, BZ = BX, CX = CY$. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника, AB – наименьшая. Возьмем произвольную точку Z на дуге AB ,

найдем на дуге BC точку X , такую, что $BX = BZ$ (X определяется однозначно, так как $AB \leq BC$), и построим точку Y , лежащую по разные стороны с B от прямой AC и такую, что $AY = AZ$, $CY = CX$. При $Z = B$ имеем $AY = AB$, $CY = CB$. Следовательно, $\angle AYC = \angle B < \varphi$ и Y лежит вне сегмента, построенного на AC (рис.40,а).

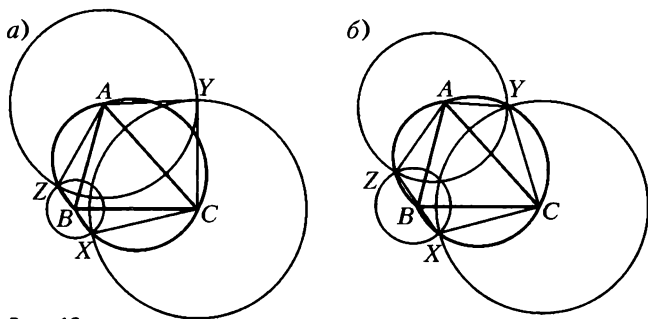


Рис. 40

При $Z = A$ точка Y не существует, так как $AC \geq BC$. Следовательно, при некотором промежуточном положении точки Z точка Y попадает на дугу AC (рис.40,б).

Осталось доказать, что из треугольников ABC , ABZ , BCX , ACY можно склеить тетраэдр, т.е. что хотя бы в одной из вершин A , B , C угол треугольника ABC меньше суммы примыкающих к той же вершине углов двух других треугольников. Если это не так, то $\angle A + \angle B + \angle C \geq 3\pi - 3\varphi > 3\pi - 2\pi = \pi$ — противоречие. (Мы воспользовались известной теоремой стереометрии: три плоских углов с общей вершиной образуют трехгранный угол тогда и только тогда, когда любой из них меньше суммы двух других).

Второе решение. (Н.Печёнкин)

Для каждого из отрезков AB , BC и CA построим на плоскости множество точек, из которых эти отрезки видны под углом φ — получим 6 дуг. Для BC пусть это множество ω_a , для AC — ω_b и для AB — ω_c . K , L , M — точки пересечения этих множеств (рис.41). Очевидно, существует область, лежащая внутри всех трех областей с границами из двух дуг (этой области, например, при-

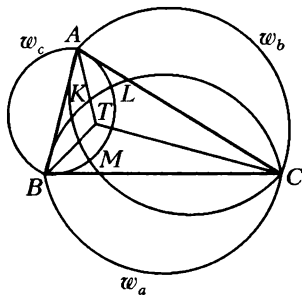


Рис. 41

надлежит точка Ферма–Торичелли, из которой все стороны треугольника видны под углом $\frac{2\pi}{3}$).

Понятно, что M лежит в области, ограниченной ω_a , $L - \omega_b$, а $K - \omega_c$. Далее, множество точек пространства, из которых отрезок BC виден под углом φ – поверхность, получающаяся при вращении ω_a относительно BC . Обозначим ее F_a . Аналогично получим еще две поверхности – F_b , F_c . Пересечением F_a и F_b будет некоторая непрерывная кривая, проходящая через C и K , причем K лежит внутри тела, ограниченного F_c , а C – вне его. Значит, линия пересечения F_a и F_b будет также пересекать и F_c .

Финальный тур

9 класс

1. Так как $\angle ABO = (\pi - \angle AOB)/2 = \pi/2 - \angle ADB$, то $\angle DAC + \angle ADB = \pi/2$, что равносильно утверждению задачи (рис.42).

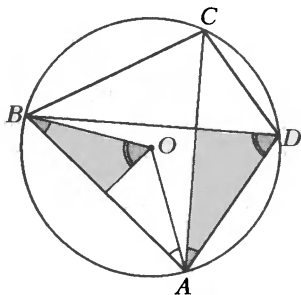


Рис. 42

2. Остроугольный треугольник можно разрезать на три равнобедренных с равными боковыми сторонами – радиусами описанной ок-

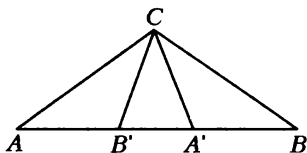


Рис. 43

ружности. Если треугольник ABC – тупоугольный (C – тупой угол), то возьмем на стороне AB точки A' , B' такие, что $AB' = B'C = CA' = A'B$, и разрежем треугольник на треугольники $AB'C$, $A'B'C$ и $A'BC$ (рис.43).

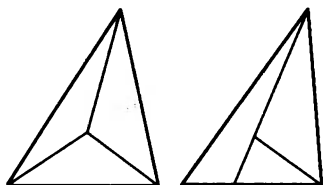


Рис. 44

Докажем, что прямоугольный треугольник ABC ($AC = BC$) разрезать требуемым образом нельзя.

Очевидно, что существует два существенно различных способа разрезания треугольника на три: соединить внутреннюю точку с вершинами или разрезать треуголь-

ник на два прямой, проходящей через вершину, а затем повторить эту операцию с одной из двух частей (рис.44).

В первом случае треугольник AXB может быть равнобедренным только при $AX = BX$, но тогда два других треугольника равнобедренными не будут. Во втором случае хотя бы один из получающихся при первом разрезе треугольников должен быть равнобедренным. Следовательно, первая прямая либо является биссектрисой прямого угла, либо соединяет точку C с точкой D на гипотенузе, для которой $AD = AC$. Ни в том, ни в другом случае провести вторую прямую так, чтобы получить нужное разрезание, невозможно.

3. Пусть K – произвольная точка внутри данной окружности. Хорда, серединой которой является K , перпендикулярна OK . Поэтому она пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда один из углов OKA , OKB не острый, а другой – не тупой. Следовательно, искомое множество состоит из точек, лежащих внутри или на границе одного из кругов с диаметрами OA , OB , и вне или на границе другого (рис.45).

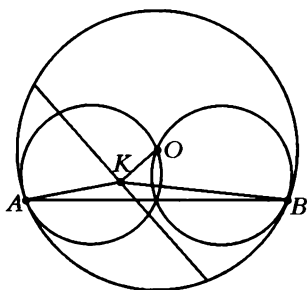


Рис. 45

4. Пусть O_1 – середина AC , а O_2 – середина BD . Несложно показать, что точка M – середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M – центр масс системы $1A, 1B, 1C, 1D$. Рассмотрим подсистемы $1A, 1C$ и $1B, 1D$, которые эквивалентны подсистемам $2O_1, 2O_2$).

Очевидно, четырехугольник, образованный ортоцентрами, есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведенных из вершин четырехугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H – точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2 , или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD . Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H , и покажем, что она проходит и через точку O_1 . Пусть наша прямая пересекает отрезок AN_4 в точке K . Тогда она является средней линией в треугольнике AN_3N_4 , и потому K – середина AN_4 . А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AN_4C и потому пройдет через O_1 .

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1 , т.е. HO_1OO_2 – параллело-

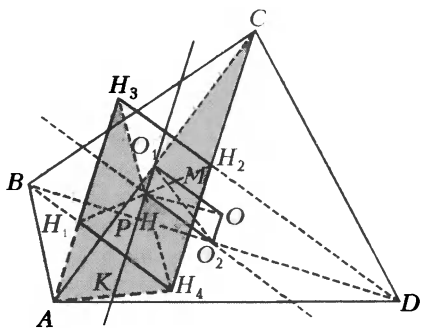


Рис. 46

грамм, причем M – точка пересечения его диагоналей (рис.46).

Отсюда следует, что точки O , M , H лежат на одной прямой, и $OM = MH$.

5. Из условия следует, что каждая медиана больше либо равна сумме биссектрисы и высоты из той же вершины. Если между какой-то медианой и соот-

ветствующей высотой угол не больше 60° , то медиана не больше удвоенной высоты, а сумма биссектрисы и высоты – не меньше, причем равенство не достигается одновременно. Поэтому из условия следует, что между каждой медианой и соответствующей высотой угол больше 60° . Так как в треугольнике наименьший угол не больше 60° , то какая-то высота проходит вне треугольника, т.е. он тупоугольный.

Пусть A – вершина тупого угла, B и C – остальные две вершины, AM – медиана, AH – высота, причем точка M принадлежит отрезку BH . По доказанному $\angle AMH < 30^\circ$. Он равен сумме углов ABM и BAM . Медиана из вершины тупого угла меньше половины противолежащей стороны. Отсюда $\angle ABH < 15^\circ$.

Высота из вершины B образует угол больше 60° с соответствующей медианой, а значит и со стороной BC . Поэтому $\angle ACB < 30^\circ$. Тогда, $\angle BAC > 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ$.

10 класс

1. Первое решение. Пусть вершина D' параллелограмма $ABCD'$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда $\angle BCA < \angle CAD$ и $\angle BAC < \angle ACD$. Следовательно, точки пересечения противоположных сторон $ABCD$ лежат на продолжении отрезков AB и BC за точку B . Очевидно, что вершина с таким свойством в четырехугольнике ровно одна (рис.47).

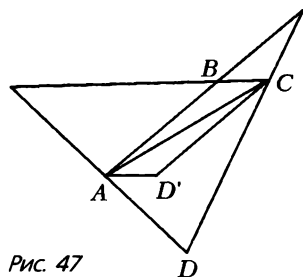


Рис. 47

Второе решение. Пусть $ABCD$ – исходный четырехугольник, $ABCD'$ – параллелограмм, лежащий в нем.

Пусть лучи CD' и AD' пересекают стороны в точках C_1 и A_1 . Тогда $S_{ABC} = S_{ABD'} = S_{ABC_1} < S_{ABD}$, аналогично $S_{ABC} < S_{ACD}$. Тогда $S_{ABC} < S_{ABD} + S_{ACD} - S_{ABC} = S_{BCD}$, т.е. ABC — треугольник наименьшей площади, образованный тремя вершинами четырехугольника. Наоборот, если он таковой, то на сторонах найдутся точки A_1 и C_1 такие, что $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{A_1BC_1} = S_{A_1BC}$, и точка пересечения AA_1 и CC_1 будет искомой (рис.48).

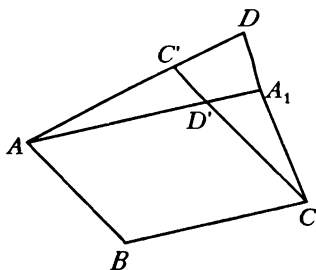


Рис. 48

2. Пусть треугольник ABC с наибольшим углом C разрезан на три подобных отрезках AX , BX , CX . Так как $\angle AXB > \angle ACB$, углу AXB в других треугольниках могут равняться только углы AXC и BXC . Значит, $\angle AXB = \angle AXC = \angle BXC = 120^\circ$. Но тогда $AX = BX = CX$ и треугольник ABC — правильный.

Пусть теперь треугольник разрезали сначала прямой, проходящей через вершину, на два, а затем один из этих двух еще на два. Так как два последних треугольника подобны, они прямоугольные, т.е. при первом разрезе от исходного треугольника отрезали прямоугольный, а затем оставшийся треугольник разделили на два высотой. Перебрав все возможные варианты, нетрудно убедиться, что исходный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. И в том, и в другом случае его можно разрезать на любое число подобных.

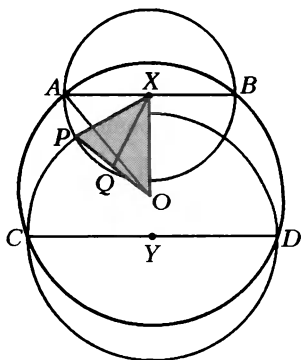


Рис. 49

3. Пусть X , Y — середины AB и CD , Q — середина OP . Тогда

$$\begin{aligned} XQ^2 &= (2OX^2 + 2XP^2 - OP^2)/4 = (2OX^2 + 2XA^2 - OP^2)/4 = \\ &= (2R^2 - OP^2)/4 = YQ^2. \end{aligned}$$

Таким образом, Q равноудалена от точек X и Y , а значит, и от прямых AB и CD (рис.49).

4. **Первое решение.** Пусть O — центр не сохраняющего ориентацию подобия, переводящего A_1 в A_2 и B_1 в B_2 . Так как

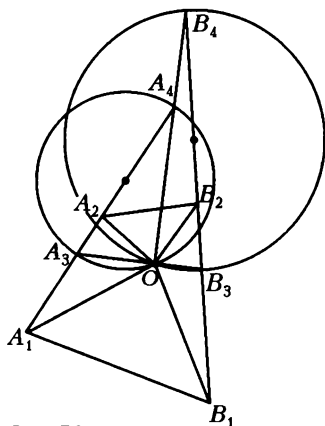


Рис. 50

треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны, $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2$ и биссектрисы углов A_1OA_2 и B_1OB_2 совпадают. Так как $OA_2/OA_1 = OB_2/OB_1 = k$, эта общая биссектриса пересекает отрезки A_1A_2 и B_1B_2 в точках A_3 и B_3 , а перпендикулярная ей прямая пересекает продолжения этих отрезков в точках A_4 и B_4 (рис.50). Следовательно, искомый угол прямой.

Чтобы найти точку O , построим окружности с диаметрами A_3A_4 и B_3B_4 и найдем точки их пересечения. Так как окружность с диаметром A_3A_4 – геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до A_2 и A_1 равно k , точки пересечения будут центрами двух подобий, переводящих A_1 в A_2 и B_1 в B_2 . Одно из этих подобий сохраняет ориентацию, другое меняет.

Второе решение. Пусть $\overline{A_1B_1} = \vec{u}$, $\overline{A_2B_2} = \vec{v}$, по условию $\vec{v}^2 = k^2\vec{u}^2$. Тогда

$$\overline{A_3B_3} = \overline{A_3A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_3} = \frac{1}{1+k} \overline{A_2A_1} + \vec{u} + \frac{1}{1+k} \overline{B_1B_2}; \quad (*)$$

с другой стороны,

$$\overline{A_3B_3} = \overline{A_3A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2B_3} = \frac{1}{1+k} \overline{A_1A_2} + \vec{v} + \frac{1}{1+k} \overline{B_2B_1}. \quad (**)$$

Умножив $(*)$ на $\frac{k}{1+k}$, $(**)$ на $\frac{1}{1+k}$ и сложив полученные равенства, имеем $\overline{A_3B_3} = \frac{k}{1+k} \vec{u} + \frac{1}{1+k} \vec{v}$. Аналогично получаем

$$\overline{A_4B_4} = \frac{1}{1-k} \vec{v} - \frac{k}{1-k} \vec{u}. \quad \text{Тогда}$$

$$(\overline{A_3B_3}, \overline{A_4B_4}) = \frac{(k\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - k\vec{u})}{(1+k)(1-k)} = \frac{k^2\vec{u}^2 - \vec{v}^2}{1-k^2} = 0,$$

т.е. векторы ортогональны.

Третье решение. (С.Сафин) Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведем биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1 . Так как $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$, $B_3Y \parallel B_2X$ и $B_3Y = kB_2X = A_1A_3$. Следова-

тельно, $A_1A_3B_3Y$ – параллелограмм, т.е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$ (рис.51).

Аналогично, A_4B_4 параллельно внешней биссектрисе угла XA_1B_1 , и значит, прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

5. Пусть O – центр окружности, на которой лежит точка C , O' – центр другой окружности. Так как $OO' = \sqrt{3}$, прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C' . Следовательно,

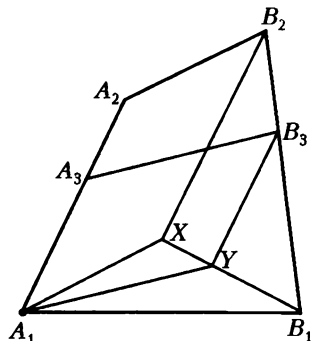


Рис. 51

$$\angle A'O'A =$$

$$= \angle AO'C' + \frac{1}{2} \angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2} \angle CA'B',$$

$$\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$

$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2} \angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2} \angle CA'B'.$$

Так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ – равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$ (рис.52).

6. Рассмотрим для определенности случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Пусть $XH = d$. Тогда

$$A_1B_2 = d \sin \angle A_1HB_2 = d \sin \angle XBC,$$

так как HA_1 перпендикулярна BC , а HB_2 перпендикулярна BX . Следовательно,

$$\frac{A_1B_2 \cdot C_1A_2 \cdot B_1C_2}{A_2B_1 \cdot C_2A_1 \cdot B_2C_1} =$$

$$= \frac{\sin \angle XBC \sin \angle XCA \sin \angle XAB}{\sin \angle XAC \sin \angle XCB \sin \angle XBA} = 1,$$

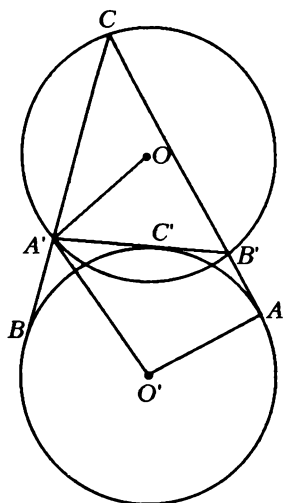


Рис. 52

что равносильно утверждению задачи (рис.53).

совпадают, то $K = U$. Точно так же доказывается, что если не совпадают прямые AV и CV , где V – точка пересечения касательных в точках B и D , то $K = V$, что невозможно. Будем считать, что на одной прямой лежат точки B, D, U . Тогда $AB/AD = AU/UD = CU/UD = BC/CD$ и точки A, C, V также лежат на одной прямой. Следовательно, K – точка пересечения AC и BD .

Второе решение. Множество точек, расстояния от которых до прямых AB и CD пропорциональны соответствующим сторонам, – это прямая, проходящая через точку пересечения AB и CD . Так как $ABCD$ вписанный, треугольники LAB и LCD , где L – точка пересечения диагоналей, подобны, т.е. L лежит на указанной прямой. Аналогично, L лежит на второй такой же прямой и, значит, совпадает с K .

4. Первое решение. Расстояние от центра окружности до хорды равно полусумме расстояний от точек B и C до прямой MP , т.е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(BM \sin \angle AMP + CP \sin \angle APM) &= \\ &= \frac{1}{2}(BM + CP) \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

(рис.56). Соответственно, длина хорды равна $a \sin \frac{\alpha}{2}$.

Второе решение. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника, X, Y – точки пересечения прямых BI, CI с прямой MP . Тогда

$$\angle MXB = \angle AMP - \angle MBX = \frac{\angle B}{2}.$$

Следовательно, треугольники BXM и BCI подобны, т.е.

$$\frac{BX}{BC} = \frac{BM}{BI} = \cos \frac{\angle A}{2}.$$

Это значит, что угол BXC прямой (рис.57).

Аналогично, угол BYC прямой. Следовательно, искомая хорда

$$XY = BC \sin \angle XCY = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

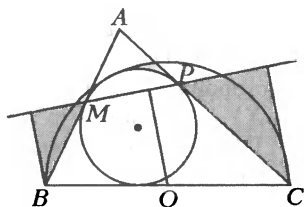


Рис. 56

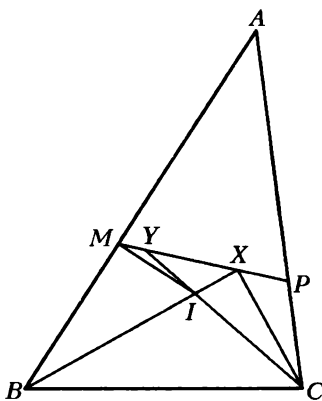


Рис. 57

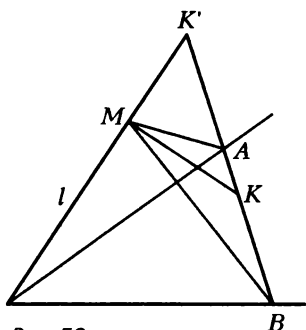


Рис. 58

5. Первое решение. На произвольной прямой, проходящей через K и пересекающей стороны угла в точках A и B , возьмем точку K' , такую что $AK'/BK' = AK/BK$. Так как все точки K' лежат на прямой l , проходящей через вершину угла, все окружности с диаметром KK' проходят через проекцию M точки K на l . При этом всегда выполнено равенство $AM/BM = AK/BK$, т.е. точка M – искомая (рис.58).

Второе решение. (Р.Девятков) Пусть O – вершина угла. Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M – точка, симметричная K относительно XU . Докажем, что точка M – искомая.

Пусть прямая, проходящая через K , пересекает прямые OX и OY в точках A и B . Заметим, что $MX = KX$, $MY = KY$, $\Delta MXU = \Delta KXU = \Delta OYU$, поэтому $MOYU$ – равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит, $\angle MXA = 180^\circ - \angle MXO = 180^\circ - \angle MYO = \angle BUM$. Далее, треугольники $AХК$ и KYU подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$
 Отсюда и из равенства углов MXA и BYM получаем, что треугольники MXA и BYM подобны (рис.59).

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK – биссектриса треугольника AMB .

6. Так как отрезки AA' и BB' пересекаются, прямые AB и $A'B'$ тоже пересекаются или параллельны. Обозначим их точку пересечения (возможно, бесконечно удаленную) через P . Так как P лежит вне двугранного угла при ребре CD , плоскость CDP не пересекает вписанную сферу. Поэтому существует проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее эту плоскость в бесконечно удаленную. В результате этого преобразования отрезок $A'B'$ станет диаметром сферы, а

AB будет ему параллелен. Так как точка пересечения AA' и BB' лежит на сфере, расстояние от ее центра до AB равно удвоенному радиусу (на рис.60 показана проекция на плоскость $ABA'B'$).

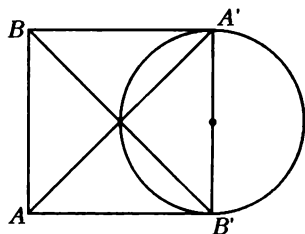


Рис. 60

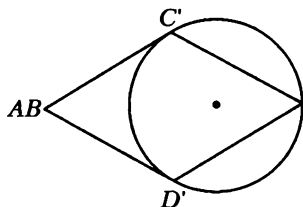


Рис. 61

Значит, угол между плоскостями ABC и ABD равен 60° , дуга большого круга, соединяющая C' и D' , равна 120° и прямые, проходящие через C' и D' и параллельные ABC , ABD , пересекаются на сфере (на рис.61 показана проекция на плоскость, перпендикулярную AB).

ВТОРАЯ ОЛИМПИАДА (2006)

Заочный тур

1. 90. Пусть l_1 , l_2 – оси симметрии F . Применив последовательно симметрию относительно l_1 , симметрию относительно l_2 и снова симметрию относительно l_1 , получим симметрию относительно прямой, симметричной l_2 относительно l_1 (рис.62). Следовательно, осями симметрии F будут все прямые, образующие с l_1 углы 46° , $2 \cdot 46^\circ$, ..., $n \cdot 46^\circ$, ... Так как $46n$ при $n < 90$ не делится на 180, эти прямые для $n = 1, \dots, 90$ различны, т.е. F имеет по крайней мере 90 осей симметрии. С другой стороны, правильный 90-угольник удовлетворяет условию задачи и имеет ровно 90 осей симметрии.

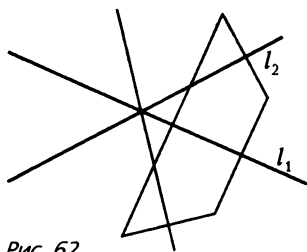


Рис. 62

2. (Н.Баканчев) Пусть l – прямая, при симметрии относительно которой окружности переходят друг в друга, A' – точка, симметричная A относительно l . Тогда точки B и A' движутся по одной окружности с противоположными скоростями, и значит, серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ не меняется. Точка его пересечения с l является центром описанной окружности

треугольника $AA'B$, следовательно, серединный перпендикуляр к AB все время проходит через эту точку.

3. Возьмем на карте произвольную точку P . При гомотетии с центром P и достаточно малым коэффициентом k точки пересечения дорог перейдут в некоторые точки A, B, C , лежащие в пределах карты, так что можно найти центр O описанной около треугольника ABC окружности. Гомотетия с центром P и коэффициентом $1/k$ переводит O в искомую точку.

4. а) Пусть H – вторая точка пересечения описанных около квадратов окружностей (рис.63). Так как $\angle AHD = 45^\circ$, $\angle DHF = 90^\circ$, $\angle ENF = 135^\circ$, точки A, E, H лежат на одной прямой. Аналогично, точки B, H, F лежат на одной прямой. Следовательно, искомый угол равен $\angle BHA = 45^\circ$.

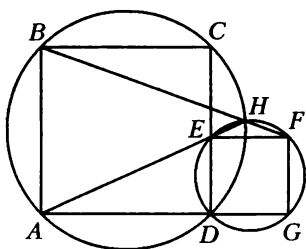


Рис. 63

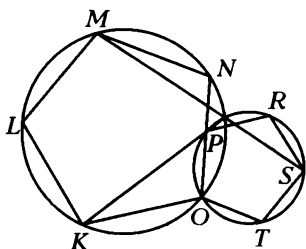


Рис. 64

б) 72° . Решение аналогично п. а) (рис.64).

5. а) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полосы на расстоянии 10 от края, C, D – на расстоянии 12. Согнув полосу по сгибам, показанным на рисунке 65,

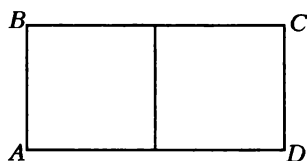


Рис. 65

расположим ее часть, лежащую правее CD рядом с частью, лежащей левее AB . Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся прямоугольные треугольники, получим искомый квадрат.

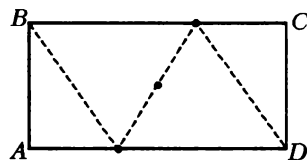


Рис. 66

б) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полосы на расстоянии 10 от края, C, D – на расстоянии $10 + \sqrt{3}$. Согнув полосу по сгибам, показанным на рисунке 66, расположим ее часть, лежащую правее CD , рядом с частью, лежащей левее AB . Повто-

рив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся треугольники, получим искомый квадрат.

6. Докажем сначала следующий факт.

Лемма. Пусть окружность, вписанная в сегмент, ограниченный дугой и хордой AB , касается дуги в точке C , а хорды в точке D . Тогда CD – биссектриса угла ACB .

Доказательство. Пусть O – центр большой окружности, O' – центр малой, L – середина дуги AB , не содержащей точки C (рис.67). Так как O' лежит на отрезке OC , а $O'D \parallel OL$, равнобедренные треугольники $O'DC$ и OLC подобны. Следовательно, D лежит на отрезке CL и прямая CD делит угол ACB пополам.

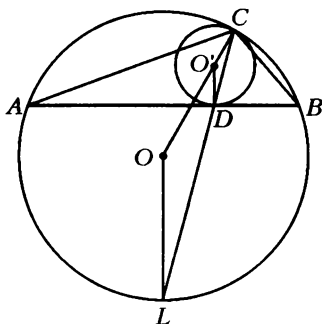


Рис. 67

Теперь приведем решение задачи.

а) Пусть искомая окружность касается данной в точке X . Из леммы следует, что $AX/XB = AC/CB$. Множество точек, удовлетворяющих этому условию, – это окружность с центром на прямой AB (она называется *окружностью Аполлония* точек A и B). Возьмем любую из точек пересечения окружности Аполлония с данной, соединим ее с центром данной окружности и найдем точку пересечения этой прямой с перпендикуляром, восставленным из C к AB . Получим центр искомой окружности. Задача имеет два решения, так как окружность можно вписать в любой из двух сегментов, на которые хорда AB делит данный круг.

б) Аналогично п.а) построим окружность Аполлония и найдем отличную от C точку ее пересечения с данной окружностью. Искомая окружность проходит через эту точку и точки A, B . Задача имеет единственное решение.

7. Так как угол BFD прямой, точка F лежит на описанной около квадрата окружности, т.е. $\angle BFC = 135^\circ = \angle AEB$ (так как два других угла треугольника AEB , очевидно, острые). Так как $\angle ABE = \angle CBF$,¹ то $\angle EBF = 90^\circ$ и $BE/EF = \frac{1}{\sqrt{2}} = BE/AB$. Применяя к треугольнику ABE теорему синусов, получаем, что $\sin \angle EAB = BE \sin \angle AEB / AB = 1/2$. Следовательно, $\angle EAB = 30^\circ$, $\angle EBA = 15^\circ$ (рис.68).

¹ Нетрудно убедиться, что случай $\angle ABE = \angle BCF$ невозможен.

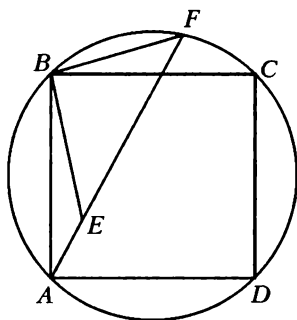


Рис. 68

8. Если отрезок AB является диагональю квадрата, то он делит квадрат на два равных треугольника, и $r_1 = r_2$, что противоречит условию задачи. Если же одна из частей является четырехугольником, то сумма его стороны AB с противоположной больше суммы двух других сторон (рис.69), и вписать в него окружность нельзя. Следовательно, AB делит квадрат на треугольник и пятиугольник (рис.70).

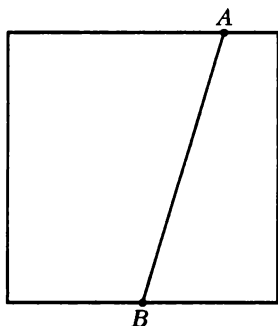


Рис. 69

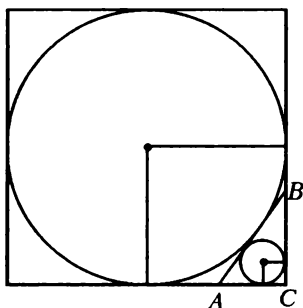


Рис. 70

Окружности с радиусами r_1, r_2 являются внеписанной и вписанной окружностями прямоугольного треугольника ABC . Значит, $r_1 = (AB + BC + CA)/2$, $r_2 = (BC + CA - AB)/2$, и $AB = r_1 - r_2$.

9. Пусть A, B, C – точки окружности, соответствующие углам α, β, γ . Перпендикуляр из центра окружности к прямой AB пересекает окружность в точке, соответствующей углу $(\alpha + \beta)/2 = \pi - \gamma/2$, а перпендикуляр к прямой $L(\gamma)$ – в точке, соответствующей углу $(\gamma + \pi - 2\gamma)/2 = \pi/2 - \gamma/2$. Следовательно, $L(\gamma)$ – высота треугольника ABC . Аналогично, $L(\alpha), L(\beta)$ – высоты ABC , и значит, все три прямые пересекаются в его ортоцентре.

10. n должно быть суммой двух степеней двойки, может быть равных (в этом случае само n – степень двойки).

Рассмотрим треугольник разбиения ABC , содержащий центр (рис.71). Если сторона AB не является стороной исходного

многоугольника, то отрезает от него многоугольник, в котором AB – наибольшее расстояние между вершинами. Следовательно, AB должна быть основанием треугольника разбиения, и число отрезаемых ею сторон четно. Для боковых сторон указанного треугольника можно провести аналогичные рассуждения, следовательно, число сторон, которые отрезает AB , есть степень двойки. (Если AB – сторона исходного многоугольника, то она отрезает 2^0 сторон.) Это верно и для сторон BC и AC . Так как в треугольнике ABC хотя бы две стороны равны, то $n = 2^k + 2^k + 2^l = 2^{k+1} + 2^l$.

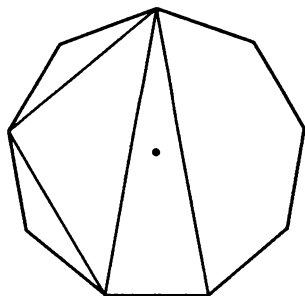


Рис. 71

Обратно, пусть $n = 2^k + 2^l$, причем $k > 0$. Пусть A – одна из вершин правильного n -угольника, а вершины B и C отстоят от нее на 2^{k-1} сторон в двух направлениях. Тогда $AB = AC$, и существует разрезание нужного вида, содержащее $\triangle ABC$ (рис. 72).

11. Пусть O_a, O_b, O_c – точки, симметричные O относительно BC, CA, AB . Очевидно, что прямые CO_c, OC' и AB пересекаются в одной точке, так что для решения задачи достаточно доказать, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

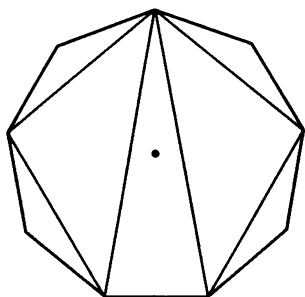


Рис. 72

Так как треугольник $O_aO_bO_c$ гомотетичен серединному треугольнику ABC с центром O и коэффициентом 2, он центрально симметричен треугольнику ABC , и прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, проходят через центр симметрии. Нетрудно также убедиться, что эта точка является для каждого из треугольников центром окружности 9 точек.

12. Предположим, что утверждение задачи неверно. Пусть H, L, M – основания высоты, биссектрисы и

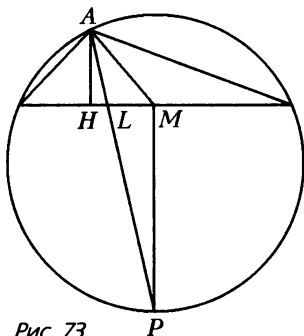


Рис. 73

медианы, P – середина дуги BC описанной окружности треугольника, не содержащей точки A (рис.73).

Если угол A тупой, $PM > AN$. Поскольку L лежит на отрезке AP , отсюда следует, что $HL < LM$, и значит, отрезок AL меньше медианы треугольника AHM , которая, в свою очередь, меньше полусуммы сторон AN и AM – противоречие.

13. Проведем через A прямую, параллельную b и пересекающую a в точке U . Аналогично, проведем через B прямую, параллельную a и пересекающую b в точке V . Для любых удовлетворяющих условию точек X, Y соответствующие стороны треугольников AUX и YUB параллельны. Следовательно, эти треугольники гомотетичны, т.е. прямые AY, BX и UV пересекаются в центре гомотетии. Очевидно, что так можно получить любую точку прямой UV .

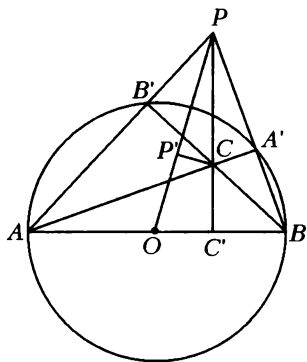


Рис. 74

14. Пусть C – ортоцентр; A', B', C' – основания высот ABP , проведенных из A, B, P ; P' – проекция C на прямую OP (рис.74). Так как $\angle CC'O = \angle CP'O = 90^\circ$, точки O, C, C', P' лежат на окружности, и $CP \cdot PC' = OP \cdot PP'$. Аналогично, $CP \cdot PC' = BP \cdot PA'$. Но A'

лежит на исходной окружности, следовательно, $BP \cdot A'P = |R^2 - OP^2|$. Таким образом, произведение $OP \cdot PP'$, а значит, и точка P' не зависят от выбора диаметра AB , т.е. искомым геометрическим местом будет прямая, проходящая через P' и перпендикулярная OP .

15. Пусть $AB < AC$. Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, из теорем Чебы и Менелая получаем, что $PB/PC = A_1B/AC$. Кроме того, $MB = (PB - A_1B)/2$, $MC = (PC + A_1C)/2$, $MA_1 = (PB + A_1B)/2 = (PC - A_1C)/2$. Следовательно, $MB/MA_1 = MA_1/MC = A_1B/A_1C$, что равносильно утверждению задачи.

16. Верно. Предположим противное. Тогда один из углов треугольника ABC , например, угол A , больше 60° . Тогда луч $B'C'$ лежит вне угла $AB'C$, а, так как $\angle A'B'C' = \angle AB'C = 60^\circ$, луч $B'A'$ лежит внутри этого угла, и значит, луч $A'B'$ лежит внутри угла $B'AC'$ (рис.75). Аналогично, луч $A'C'$ лежит

внутри этого угла, что противоречит равенству $\angle B'A'C' = \angle BA'C = 60^\circ$.

17. Утверждение задачи равносильно тому, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности, т.е. $\angle XAY = \angle XBY$. Но $\angle XAY = \angle BAA_2 - \angle BAX = \angle BAA_2 - \angle BB_1A_1$, $\angle XBY = \angle B_2BA - \angle AA_1B_1$. При этом из параллельности A_1B_1 и A_2B_2 следует, что $\angle ABB_1 + \angle A_1B_1B = \angle BAA_2 + \angle B_2A_2A$, откуда, очевидно, и вытекает искомое утверждение.

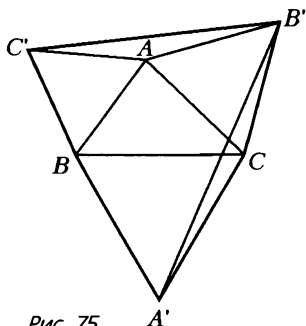


Рис. 75

18. Рассмотрим для определенности случай, изображенный на рисунке 76. Пусть U – точка пересечения HX и BZ , V – точка пересечения HY и AZ . Тогда утверждение задачи равносильно равенству $HU/UX = YV/HV$ или $HU/YV = HV/XU$. В прямоугольных треугольниках AYV и BUN углы AYV и BUN равны, так как их стороны перпендикулярны. Следовательно, треугольники подобны и $HU/YV = BU/AV$. Аналогично, $HV/XU = BU/AV$. Другие случаи рассматриваются аналогично.

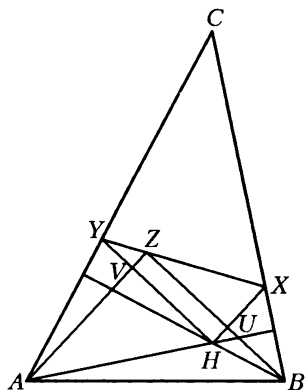


Рис. 76

19. Стороны треугольника T_1 являются внешними биссектрисами углов треугольника T_0 , образованного средними линиями T , и значит, пересекаются в центрах его вневписанных окружностей. При этом биссектрисы внутренних углов T_0 являются высотами T_1 , т.е. его центр вписанной окружности I_0 совпадает с ортоцентром T_1 , а центр описанной O_0 является центром окружности, проходящей через середины T_1 и, значит, серединой отрезка I_0O_1 , где O_1 – центр описанной окружности T_1 . Кроме того, O_0 – середина отрезка OH , где O, H – центр описанной окружности и ортоцентр T , а центр тяжести T , точка M , делит отрезок HO в

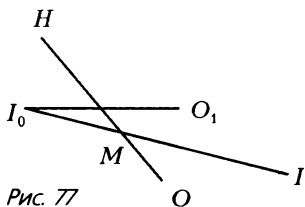


Рис. 77

отношении 2 : 1 (рис.77). Гомотетия с центром I_0 и коэффициентом $\frac{1}{3}$ переводит центр I вписанной окружности T в M , а гомотетия с центром O_0 и коэффициентом -3 переводит M в H . Так как композиция этих гомотетий есть центральная симметрия с центром O_1 , то O_1 – середина IH .

20. Докажем сначала, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC , BCD , CDA и DAB , пересекаются в одной точке. Пусть X – точка пересечения окружностей 9 точек треугольников ACD и BCD , отличная от середины AB , Y , Z , U – середины AC , BC , CD . Тогда $\angle YXZ = \angle YXU + \angle XUZ = \angle DCA + \angle BDC = \angle BCD$, т.е. X лежит на окружности 9 точек треугольника ABC . Аналогично, X лежит и на окружности 9 точек треугольника ABD . Далее, так как окружности 9 точек треугольников CDA и ACB_1 совпадают, точка X лежит также на окружностях 9 точек треугольников ABB_1 и CBB_1 . Аналогично, она лежит на окружностях 9 точек треугольников ABA_1 и BCC_1 , а значит, и на окружностях 9 точек треугольников A_1B_1B , BB_1C_1 и $A_1B_1C_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Более короткое решение можно получить, используя следующий факт.

Пусть точки U , V , W лежат на равносторонней гиперболе. Тогда ортоцентр треугольника UVW также лежит на этой гиперболе, а его окружность 9 точек проходит через ее центр.

Действительно, проведя равностороннюю гиперболу через точки A , B , C , D , получим, что все окружности проходят через ее центр.

21. Обозначим $P_1 = AB' \cdot BC' \cdot CA'$, $P_2 = B'A \cdot AC' \cdot CB'$. Нелегко убедиться, что $S_{A'B'C'} = (P_1 + P_2)/4R$, где R – радиус описанной окружности ABC , и, следовательно,

$$\frac{S_{ABC} S_{BC'A'} S_{CA'B'}}{S_{ABC} S_{A'B'C'}^2} = \frac{P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

причем равенство возможно лишь при $P_1 = P_2$, что равносильно пересечению прямых AA' , BB' и CC' в одной точке.

22. Пусть Q – отличная от X точка пересечения окружностей ABX и PXY . Тогда $\angle ABQ = \angle AXQ = \angle YXQ = \angle YPQ = \angle BPQ$. Значит, $\angle BQP = \pi - (\angle BPQ + \angle QBP) = \pi - \angle ABP$ не зависит от выбора точки X . Следовательно, все окружности PXY проходят через Q и их центры лежат на серединном перпендикуляре к PQ .

23. а) Пусть M_a и H_a – соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD . Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим аналогично. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O . Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $M_a M_b M_c M_d$ переходит в четырехугольник $H_a H_b H_c H_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 3. Соответственно, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

б) Обозначим через M_1 центр тяжести периметра четырехугольника. Точка G лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении 2 : 1. Действительно, M_1 – это центр тяжести четырех точек, помещенных в середины сторон четырехугольника с массами, пропорциональными их длинам, а G – центр тяжести четырех точек, помещенных в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA с массами, пропорциональными площадям этих треугольников. Очевидно, две этих системы точек гомотетичны с центром I и коэффициентом $\frac{2}{3}$.

Пусть a, b, c, d – длины касательных к вписанной окружности из вершин A, B, C, D . Очевидно, что если поместить в A, B, C, D массы a, b, c, d , то центром тяжести полученной системы будет точка N , а если поместить в вершины массы $2a + b + d, 2b + a + c, 2c + b + d, 2d + c + a$, то точка M_1 . Осталось показать, что I – центр тяжести масс $b + d, a + c, b + d, a + c$.

Точка I удовлетворяет соотношению $S_{IAB} - S_{IBC} + S_{ICD} - S_{IDA} = 0$. Этому же соотношению удовлетворяют середины U и V диагоналей четырехугольника. Следовательно, эти три точки лежат на одной прямой (это утверждение называется *теоремой Монжа*). Пусть теперь X, Y – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AD . Тогда прямая XY образует равные углы с этими сторонами и по теореме Бриансона проходит через точку L пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам LXB и LYD , получим, что $BL/DL = b/d$. Аналогично, $AL/CL = a/c$. Отсюда и из соотношений $S_{UBC}/S_{UAD} = BL/DL$, $S_{VBC}/S_{VAD} = CL/AL$, $S_{IBC}/S_{IAD} = (b + c)/(a + d)$ вытекает, что I делит отрезок AC в отношении $(a + c)/(b + d)$, что и требуется.

24. а) Пусть P_1 – точка, симметричная P относительно прямой AB , P_2 – точка, симметричная P относительно середины отрезка AB . Тогда треугольники ABP_1 и ABP_2 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB , следова-

тельно, $OP_1 = OP_2$. Так как $APBP_2$ – прямоугольник, $OA^2 + OB^2 = OP^2 + OP_2^2$, т.е. расстояние OP_2 не зависит от выбора лучей PA, PB . Следовательно, точки P_1, P_2 лежат на окружности с центром O , а проекция P на AB – на окружности вдвое меньшего радиуса с центром в середине отрезка OP .

б) Построим пирамиду $PABC$ до прямоугольного параллелепипеда $PAC'BC'B'P'A'$. Аналогично п.а) получаем, что $OP'^2 = 3R^2 - 2OP^2$, т.е. точка P' лежит на сфере с центром O . Так как центр тяжести M треугольника ABC лежит на отрезке PP' и делит его в отношении $1 : 2$, M лежит на сфере, центром которой является точка, лежащая на отрезке OP и делящая его в отношении $2 : 1$. Далее, проекцией O на плоскость ABC является центр O' описанной около треугольника ABC окружности, а проекцией P – его ортоцентр H . Так как M лежит на отрезке $O'H$ и $MH = 2MO'$, $MK = KH$, т.е. искомым ГМТ будет сфера с центром K и радиусом, равным $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}/3$.

25. Из условия следует равенство трехгранных углов в вершинах A и B , C и D . Следовательно, $\angle CBD = \angle CBA = \angle DAC = \angle DAB$, $\angle ADB = \angle CDB = \angle DCA = \angle BCA$, и все грани тетраэдра подобны. При этом $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle BAD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Значит, $\frac{AB}{CD} = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^3$.

26. Окружности оснований конусов лежат на сфере с центром в вершине конусов и радиусом, равным их образующей. Инверсия с центром в любой точке этой сферы переводит ее в плоскость, а окружности – в окружности на этой плоскости, каждая из которых касается двух других. Из теоремы об угле между касательной и хордой сразу следует, что четыре точки касания лежат на одной окружности, которой соответствует окружность на сфере.

Финальный тур

8 класс

1. Очевидно, вписать треугольник в полукруг можно двумя способами: либо две вершины треугольника лежат на дуге, а третья на диаметре полукруга, либо, наоборот, две вершины на диаметре, а третья на дуге. Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B лежат на дуге. Тогда серединный перпендикуляр к AB проходит через центр полукруга. Следова-

тельно, третья вершина совпадает с центром и сторона треугольника равна радиусу полукруга (рис.78).

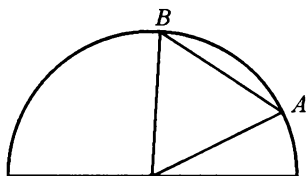


Рис. 78

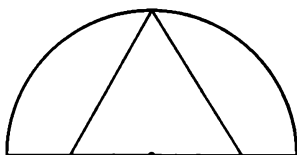


Рис. 79

Во втором случае высота треугольника не превосходит радиуса полукруга, причем в случае, изображенном на рисунке 79, равенство достигается. Следовательно, именно этот треугольник и будет искомым.

2. $n = 3$. Из рисунка 80 видно, что при любом $n \geq 3$ треугольник можно разрезать на n -угольник и $(n + 1)$ -угольник. Следовательно, можно лучами, выходящими из одной вершины, разрезать треугольник на 1002 треугольника, а затем первый из них разрезать на треугольник и четырехугольник, второй на пятиугольник и шестиугольник, ..., последний – на 2005-угольник и 2006-угольник.

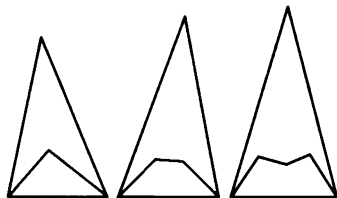


Рис. 80

3. Рассмотрим, например, случай, изображенный на рисунке 81. Имеем $AX = AD = BC$ и $CY = CD = AB$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \angle BCU &= \angle C - \angle DCU = \angle C - (\pi - 2\angle CDY) = \\ &= 2\angle CDY - \angle D = \angle CDY - \angle ADX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle BAX &= \angle DAX - \angle A = \pi - 2\angle ADX - \angle A = \\ &= \angle D - 2\angle ADX = \angle CDY - \angle ADX. \end{aligned}$$

Значит, треугольники ABX и CUY равны, откуда и следует искомое равенство. Другие случаи расположения точек X, Y рассматриваются аналогично.

4. Рассмотрим случай, когда P лежит внутри второй окружности (рис.82). Пусть Q – точка пересечения с этой окружностью прямой, проходящей через P и перпендику-

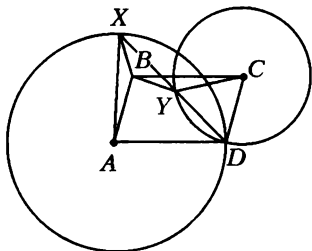


Рис. 81

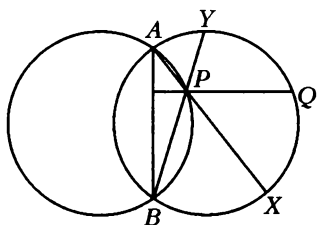


Рис. 82

5. Нет. Предположим противное, и пусть AB – наибольшая сторона многоугольника, CD – наименьшая диагональ (AB и CD могут иметь один общий конец), E –

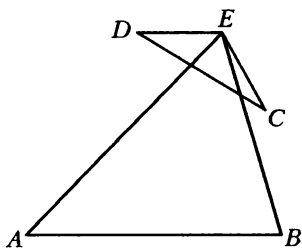


Рис. 83

вершина, лежащая от CD по другую сторону, чем A и B (рис.83). Тогда, так как $AE \leq AB$ и $BE \leq AB$, $\angle AEB \geq 60^\circ$. С другой стороны, так как $CE \geq CD$ и $DE \geq CD$, $\angle CED \leq 60^\circ$. Но $\angle CED > \angle AEB$ – противоречие.

6. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки, симметричные P относительно BC, CA, AB . Так как $CA_1 = CP = CB_1$, серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1 совпадает с биссектрисой угла A_1CB_1 . Так как $\angle A_1CB_1 = 2\angle ACB$, эта биссектриса проходит внутри угла ACB (рис.84). Аналогично, серединные перпендикуляры к отрезкам A_1C_1 и B_1C_1 проходят внутри соответствующих углов треугольника ABC . Следовательно, центр Q окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, лежит внутри треугольника ABC . Так как треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом $\frac{1}{2}$, центр окружности, описанной около $A'B'C'$, совпадает с серединой отрезка PQ и, значит, лежит внутри ABC .

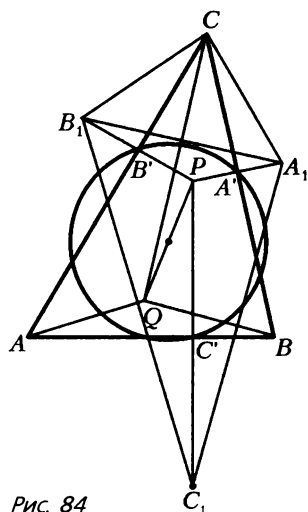


Рис. 84

ной отрезка PQ и, значит, лежит внутри ABC .

1. Пусть O – центр внешней окружности, O_1, O_2 – центры внутренних, A, B – точки касания. Проведем через O_1 прямую, параллельную OB , а через O_2 прямую, параллельную OA . По теореме Фалеса эти прямые пересекутся в точке C , лежащей на отрезке AB . При этом $O_1C = O_1A$ и $O_2C = O_2B$, так что точка C принадлежит обеим внутренним окружностям (рис.85).

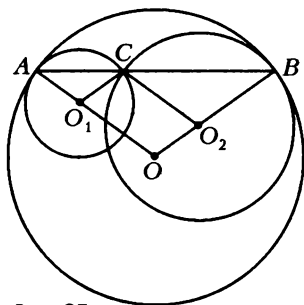


Рис. 85

2. Пусть O – центр данной окружности, O' – центр окружности, проходящей через середины сторон ABC , P – центр тяжести ABC . Поскольку вершины треугольника ABC переходят в середины его сторон при гомотетии с центром P и коэффициентом $-\frac{1}{2}$, P лежит на отрезке OO' и делит его в отношении $2 : 1$. Кроме того, так как множество середин хорд, проходящих через M , – это окружность с диаметром OM , множество центров тяжести треугольников ABC – тоже окружность, получающаяся из нее гомотетией с центром A и коэффициентом $\frac{2}{3}$. Значит, множество точек O' – тоже окружность (рис.86).

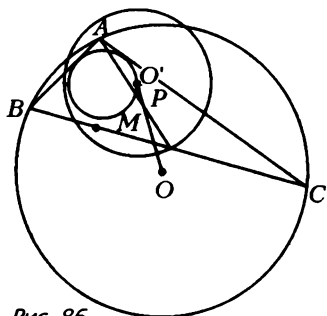


Рис. 86

Поскольку радиусы всех окружностей, проходящих через середины сторон ABC , равны половине радиуса данной окружности, все эти окружности касаются двух окружностей, concentричных с окружностью, на которой лежат точки O' (если точка M совпадает с O , одна из этих окружностей вырождается в точку).

3. Подобие, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, можно представить как композицию симметрии относительно прямой l и гомотетии с центром в некоторой точке, лежащей на l , и коэффициентом k , равным отношению соответствующих сторон треугольников. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 делятся l в отношении, равном k , т.е. точки A', B', C' лежат на l .

4. Пусть t – корень уравнения $t^4 + t^2 = 1$. Возьмем шести-

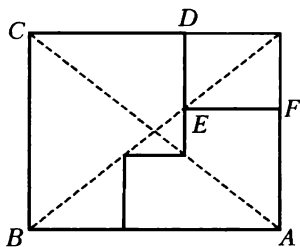


Рис. 87

угольник $ABCDEF$, в котором $AB : BC = BC : CD = CD : AF = AF : FE = FE : ED = \frac{1}{t}$, и разрежем его, как на рисунке 87. Тогда получившиеся шестиугольники подобны $ABCDEF$ с коэффициентами t и t^2 .

5. 1:1. Прежде всего докажем, что прямая делит периметр и площадь треугольника в одном отношении тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности. Действительно, пусть прямая пересекает стороны AC , BC в точках X , Y , а биссектрису угла C в точке J ; d_1 — расстояние от J до стороны AB , d_2 — расстояние от J до двух других сторон. Тогда $2S_{CXU} = (CX + CY)d_2$, $2S_{AXYB} = (AX + BY)d_2 + AB \cdot d_1$, и отношения равны тогда и только тогда, когда $d_2 = d_1$, т.е. J — центр вписанной окружности.

Пусть теперь центр описанной окружности O , центр вписанной окружности I и ортоцентр H лежат на одной прямой. Эта прямая содержит не более одной вершины треугольника. Пусть она не проходит через вершины A и B . Так как AI , BI — биссектрисы углов HAO , HBO , получаем, что $AH/AO = HI/IO = BH/BO$. Так как $AO = BO$, то $AH = BH$, т.е. треугольник ABC равнобедренный и искомое отношение равно 1:1.

6. Используем следующее утверждение.

Пусть $KLMN$ — выпуклый четырехугольник; точки X , Y делят отрезки KL и NM в отношении α ; точки U , V делят отрезки LM и KN в отношении β . Тогда точка пересечения отрезков XU и YV делит первый из них в отношении β , а второй в отношении α (рис.88).

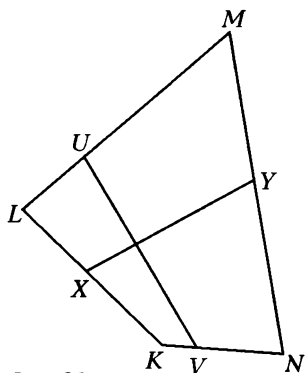


Рис. 88

Доказательство этого утверждения легко получить методом масс.

Пусть теперь A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — центры тяжести треугольников BCD , CDA , DAB , ABC ; A_2 , B_2 , C_2 , D_2 — центры описанных около них окружностей. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ относительно его цент-

ра тяжести с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Следовательно, соответствующие диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в одинаковых отношениях. Докажем, что в тех же отношениях делят друг друга диагонали четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$.

Пусть P – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{CP} = \frac{\sin \angle ABD \sin \angle ACB}{\sin \angle BAC \sin \angle CBD}.$$

Поскольку стороны и диагонали четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$ перпендикулярны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$ (например, точки A_2, B_2 лежат на серединном перпендикуляре к CD), в таком же отношении делится и диагональ A_2C_2 .

Пусть теперь P_1, P_2 – точки пересечения диагоналей четырехугольников $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$; P' – точка на отрезке $A'C'$, делящая его в отношении A_2P_2/P_2C_2 . Так как точки A_1, C_1 лежат на отрезках $A'A_2, C'C_2$ и делят их в отношении 2:1, из сформулированного утверждения вытекает, что точка P_1 также делит отрезок $P'P_2$ в отношении 2:1. Рассмотрев аналогичную точку на отрезке $B'D'$, получим тот же результат. Отсюда следует, что P' – точка пересечения диагоналей четырехугольника $A'B'C'D'$, причем диагонали делятся этой точкой в том же отношении, что и в четырехугольниках $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$.

10 класс

1. Пусть O – точка пересечения прямых. Возьмем на прямой l_1 точку A_1 и найдем на l_3 такую точку A_2 , что середина B отрезка A_1A_2 лежит на прямой l_2 (рис.89). Применяя теорему синусов к треугольникам OA_1B и OA_2B , получаем, что $\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{\sin \angle A_1OB}{\sin \angle A_2OB}$.

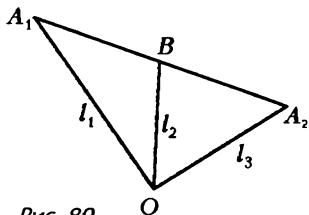


Рис. 89

Аналогично по точке A_2 построим на прямой l_5 такую точку A_3 , что середина A_2A_3 лежит на l_4 и т.д. Перемножив полученные соотношения, получим, что A_6 совпадает с A_1 .

2. Рассмотрим случай, когда X лежит внутри $ABCD$, осталь-

ные разбираются аналогично. Пусть K, L, M, N – проекции X на AB, BC, CD, DA ; K', L', M', N' – точки, симметричные X относительно этих прямых. Так как K, L, M, N лежат на окружности, K', L', M', N' также лежат на окружности. Так как $BK' = BX = BL'$, серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$ проходит через B и является биссектрисой угла $K'BL'$, т.е. симметричен BX относительно биссектрисы угла B . Следовательно, четыре прямые, симметричные прямой, соединяющей X с вершинами $ABCD$, относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке X' , являющейся центром описанной окружности четырехугольника $K'L'M'N'$. При этом центром окружности $KL MN$ будет середина XX' , и значит, X' совпадает с Y . Далее, так как четырехугольники $XKBL, XL CM, XMDN, XNAK$ вписанные,

$$\begin{aligned}\angle AXB + \angle CXD &= \angle KXA + \angle KXB + \angle CXM + \angle DXM = \\ &= \angle KNA + \angle BLK + \angle CLM + \angle MND = \\ &= (\pi - \angle KLM) + (\pi - \angle MNK) = \pi.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что прямые XB и DX симметричны относительно биссектрисы угла AXC . Аналогично, прямые YB и DY симметричны относительно биссектрисы угла AYC . Кроме того,

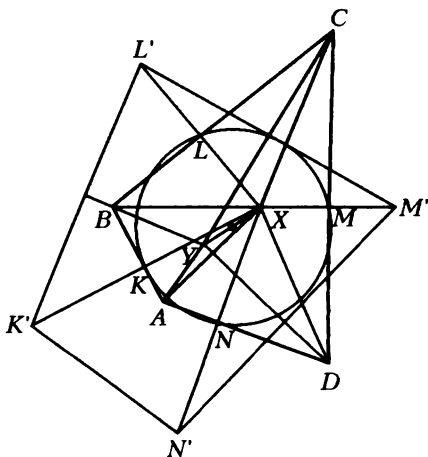


Рис. 90

как уже было показано, совпадают биссектрисы углов BAD и XAY , BCD и XCY . Таким образом, прямые, симметричные BA, BX, BC, BY относительно биссектрис соответствующих углов $AXCY$, пересекаются в точке D . Отсюда, рассуждая аналогично началу решения, получаем утверждение задачи (рис. 90).

3. Пусть X – точка пересечения касательных. Проведем окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно нее. При этой инверсии окружности, касающиеся в точке P , перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух

прямых, переходящих в себя. Следовательно, исходная окружность перейдет в себя. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т.е. касательная из X к исходной окружности равна XP и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т.е. искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

4 (М.Илюхина). Пусть A' – точка пересечения касательных к описанной окружности ω в точках B и C (аналогично построим точки B' и C'). Тогда, как известно, прямая AA' является симедианой треугольника ABC (т.е. прямой, симметричной AA_1 относительно биссектрисы угла A). Пусть прямая AA' вторично пересекает ω в точке A_0 . Тогда $\angle A_1AB = \angle A_0AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны.

Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω – его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы l угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что l – серединный перпендикуляр к BC , поэтому A при этой симметрии переходит в A_2 (рис.91), а следовательно, прямая A_1A_2 переходит в прямую AA' . Поэтому, так как прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC ,

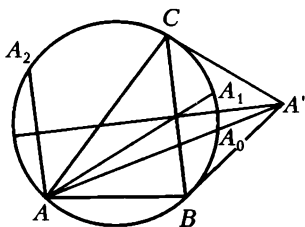


Рис. 91

то прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 также пересекаются в точке, изогонально сопряженной L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A' , B' , C' не существует, аналогичен.

5. Да. Например, можно склеить тетраэдр из развертки, показанной на рисунке 92 (меньший катет разделен на три равные части, а гипотенуза в отношении 4 : 1). Нетрудно убедиться, что каждый из трех углов, на которые делится меньший угол треугольника, меньше суммы двух других; следовательно, из такой развертки, действительно, можно склеить тетраэдр.

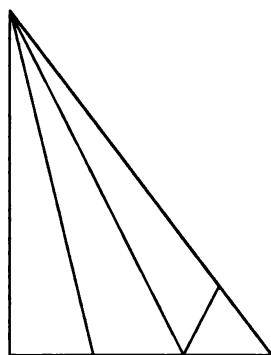


Рис. 92

6. Построение основано на двух леммах.

Лемма 1. *Диагонали всех четырехугольников, вписанных в данную окружность с центром O и описанных около данной окружности с центром I , пересекаются в одной и той же точке L , лежащей на продолжении отрезка OI за точку I .*

Лемма 2 (теорема Монжа). *Центр вписанной в четырехугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей.*

Отметим также, что в любом четырехугольнике точка M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, делит пополам отрезок между серединами диагоналей.

Из леммы 1 следует, что середины диагоналей искомого четырехугольника лежат на окружности с диаметром OL . Отсюда и из леммы 2 получаем, что точка M лежит на окружности, диаметрально противоположными точками которой являются I и середина OL . Поэтому, проведя через M прямую, перпендикулярную IM , и найдя точку ее пересечения с OI , мы получим середину OL , а значит, и саму точку L . Далее, построив окружность с диаметром OL и найдя ее точки пересечения с прямой MI , получим середины диагоналей четырехугольника. Кроме того, рассмотрев четырехугольник, две вершины которого лежат на прямой OI , нетрудно убедиться, что для третьей вершины X отрезок XI – биссектриса угла OXL (рис.93). Это дает возможность восстановить описанную окружность четырехугольника и найти его вершины, как точки пересечения этой окружности с диагоналями.

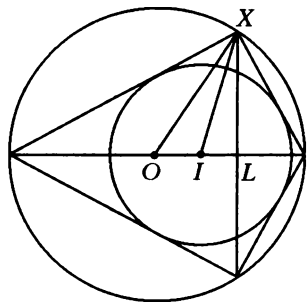


Рис. 93

ТРЕТЬЯ ОЛИМПИАДА (2007)

Заочный тур

1. 30° , 60° , 90° . Среди вершин неравностороннего треугольника по крайней мере одна не является вершиной исходного треугольника. Сумма углов треугольников разбиения, сходящихся в этой вершине, равна 180° или 360° . Следовательно, угол треугольника кратен 60° , и так как треугольник не равносторонний, этот угол равен 120° . Тогда два других угла этого треугольника равны 30° и, так как они не кратны

60° , соответствующие вершины находятся в вершинах исходного треугольника. Углы треугольника в этих вершинах могут равняться только 30° , 90° или 150° , при этом хотя бы один из двух углов не равен 30° , а их сумма меньше 180° . Единственный возможный вариант — 30° и 90° . Такой треугольник требуемым образом разрезать можно, например, проведя медиану из вершины прямого угла (рис.94).

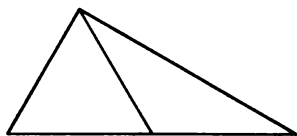


Рис. 94

2. Неверно. Например, пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором угол B тупой и не равен 120° , D — центр окружности, описанной около ABC . Тогда четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условиям задачи и не является ромбом.

3. $n = 5$. Докажем, что при $n = 3, 4$ указанная ситуация невозможна. При $n = 3$ углы треугольников разбиения, сходящиеся во внутренней точке, равны, так как сумма любых двух разных углов в них меньше 180° . Но тогда равны и противоположные им стороны, являющиеся сторонами многоугольника.

Можно рассуждать и по-другому. Так как треугольники, на которые разрезается данный треугольник, равны, то равны радиусы описанных около них окружностей и площади. Из первого условия следует, что точка, определяющая разрезание, является ортоцентром треугольника, а из второго, что она является его центром тяжести. Но ортоцентр и центр тяжести совпадают только в правильном треугольнике.

Пусть четырехугольник $ABCD$ разрезан на равные треугольники отрезками из точки O . Проведем ломаную (или прямую) AOC . В точке O сумма двух углов, находящихся с некоторой стороны от AOC , не меньше 180° . Аналогично случаю $n = 3$ получаем, что соответствующие стороны равны. Рассмотрим ломаную BOD , получаем равенство одной из этих сторон и третьей стороны. Пусть, скажем, $AB = BC = CD = l$. Предположим, что $AD \neq l$. В треугольнике AOD есть сторона длины l , скажем AO . Таким образом, в треугольнике AOB (и всех равных ему) имеется две стороны длины l . Как следствие, $AO = DO = l$. В треугольнике BOC имеется две стороны длины l . Одна из них BC , а другая, скажем, BO . Но тогда в треугольнике AOB все стороны равны. Следовательно, это верно и для $\triangle AOD$, т.е. $AD = l$ — противоречие.

При $n = 4$ также имеется второе решение: $\angle OAB = \angle OCB$, как углы, противоположные одной и той же стороне равных треугольников. Аналогично $\angle OAD = \angle OCD$, $\angle OBC = \angle ODC$,

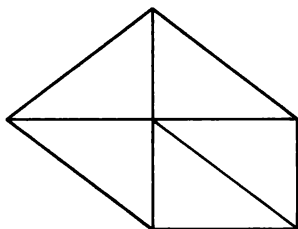


Рис. 95

$\angle OBA = \angle ODA$. Следовательно, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, и $ABCD$ – параллелограмм. Так как отрезки из O делят его на равновеликие треугольники, O – точка пересечения его диагоналей, а тогда из равенства треугольников следует, что $ABCD$ – ромб.

При $n = 5$ указанная ситуация возможна (рис.95).

4. Нет. Пусть в параллелограмме $ABCD$ сторона AD не меньше AB . Отложим на AD отрезок $AE = AB$ и проведем через E прямую, параллельную AB . Получим ромб, а в ромбе точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности и, значит, лежит внутри ромба. Но она является точкой пересечения двух биссектрис исходного параллелограмма, а ромб в нем содержится. Значит, эта точка принадлежит параллелограмму.

5. а) Да (рис.96). б) Да (рис.97).

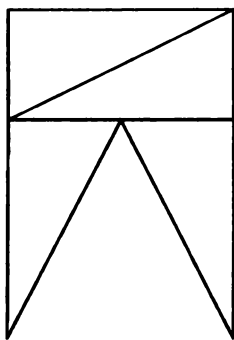


Рис. 96

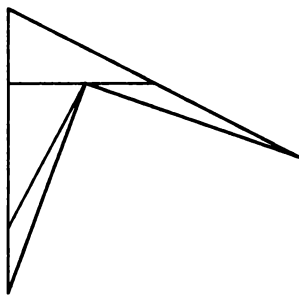


Рис. 97

6. а) 0, 1, 2 или 4. б) 0, 1, 3, 5 или 9.

а) Каждая ось симметрии клетчатого многоугольника проходит через некоторую его клетку, которая, следовательно, переходит в себя при симметрии относительно этой оси. Поэтому ось параллельна стороне или диагонали клетки. Отсюда следует, что в клетчатом многоугольнике возможны лишь 4 направления осей симметрии.

Двух параллельных осей симметрии в ограниченной фигуре быть не может. Действительно, композиция симметрий относительно двух параллельных прямых является параллельным

переносом. Ограниченная фигура не может совместиться с собой при переносе, поэтому хотя бы одна из этих прямых не является ее осью симметрии.

Таким образом, клетчатый многоугольник имеет не более 4 осей симметрии. Если он имеет три оси симметрии, то композиция этих симметрий является симметрией относительно четвертой прямой. Примеры многоугольников, имеющих 0, 1, 2 и 4 оси симметрии, приведены на рисунке 98.

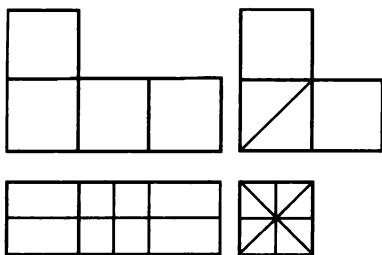


Рис. 98

б) Аналогично п.а) получаем, что все оси симметрии имеют различные направления и параллельны либо ребрам составляющих многогранник кубиков, либо диагоналям его граней. Следовательно, осей симметрии не более 9. Пусть прямые l , l_1 являются осями симметрии. Если угол между ними не прямой, то прямая l_2 , симметричная l_1 относительно l , тоже будет осью симметрии. Если же $l \perp l_1$, то осью симметрии будет также прямая, перпендикулярная им обеим. Поэтому все оси симметрии, кроме l , можно разбить на пары, т.е. их общее количество нечетно. Нетрудно убедиться, что возможными являются все нечетные значения, кроме 7, так как если имеется 7 осей, то, отражая их относительно друг друга, получаем еще 2.

7. Да. (М.Кайранбай) Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ – данный многоугольник, B_1, B_2, \dots, B_n – точки касания вписанной окружности со сторонами $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$. Обозначим значения углов первого многоугольника через a_1, \dots, a_n , а второго – через b_1, \dots, b_n . Тогда $b_i = (a_i + a_{i+1})/2$. Перемножая n таких равенств, получаем $2^n a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 + a_2) \dots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1)$. Но по неравенству о средних $a_i + a_{i+1} \geq 2\sqrt{a_i a_{i+1}}$. Поэтому из полученного равенства следует, что все углы многоугольников равны, а так как многоугольник $B_1 \dots B_n$ – вписанный, то многоугольники правильные.

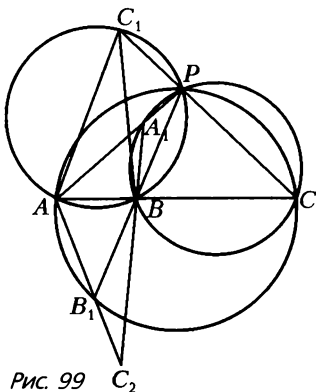


Рис. 99

8. Так как четырехугольники PAB_1C и $PBAC_1$ вписанные, $\angle CAC_2 = \angle CAB_1 = \angle CPB_1 = \angle BAC_1$ (рис.99). Аналогично $\angle ABC_2 = \angle ABC_1$, т.е. точки C_1, C_2 симметричны относительно прямой AB . Повторив это рассуждение для двух других пар точек, получим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно этой прямой и, следовательно, равны.

9. Пусть сторона $C'D'$ четырехугольника $A'B'C'D'$ лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB четырехугольника $ABCD$, а сторона $D'A'$ на серединном перпендикуляре к BC . Тогда D' – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Аналогично A', B', C' – центры описанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB . Следовательно, $B'D'$ – серединный перпендикуляр к AC . В свою очередь, AC является серединным перпендикуляром к одной из диагоналей $A'B'C'D'$, а так как $AC \perp B'D'$ и $B'D' \parallel A'C'$, AC – серединный перпендикуляр к $B'D'$, т.е. $AB'CD'$ – ромб. Композиция симметрий относительно прямых $C'D', D'A', A'B'$ и $B'C'$ оставляет точку A на месте и, значит, является поворотом с центром A . С другой стороны, она является композицией поворотов с центром D' на удвоенный угол $C'D'A'$ и с центром B' на удвоенный угол $A'B'C'$, следовательно, $\angle C'B'A' = \angle AB'D' = \angle B'D'A' = \angle A'B'C'$. Аналогично, $\angle B'C'D' = \angle D'A'B'$, т.е. $A'B'C'D'$ – параллелограмм. Так как стороны $ABCD$ перпендикулярны сторонам $A'B'C'D'$, $ABCD$ – параллелограмм с такими же углами.

Так как C – центр описанной окружности треугольника $B'C'D'$, $\angle D'CB' = 2\angle C'D'A' = \angle B'D'C + \angle CB'D' = 90^\circ$. Соответственно, острые углы параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны 45° . Нетрудно видеть, что два таких параллелограмма, получающихся друг из друга поворотом на 90° вокруг общего центра, удовлетворяют условию задачи (рис.100).

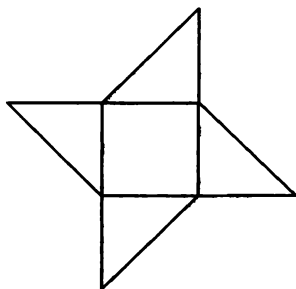


Рис. 100

10. Пусть A, B, C – данные точки. Построим на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол 60° , и найдем середины A', B', C' дополнительных дуг.

Прямые, соединяющие центр треугольника с его вершинами, проходят через A', B', C' , а поскольку вершины движутся по построенным окружностям с равными угловыми скоростями, углы, под которыми из центра

видны отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, остаются постоянными. Следовательно, искомое ГМТ – окружность $A'B'C'$ (рис. 101).

11. Из точки, находящейся на высоте h над уровнем моря, видно на расстояние

$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh - h^2},$$

где R – радиус Земли (рис. 102).

Если $h \ll R$, то с достаточно большой точностью $d = \sqrt{2Rh}$. Поэтому искомое отношение можно считать равным $\sqrt{2}$ или 1,4.

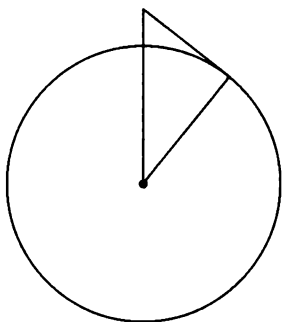


Рис. 102

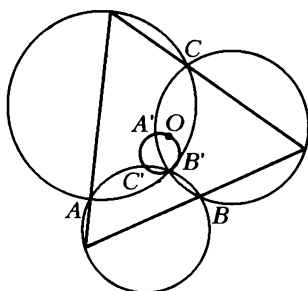


Рис. 101

12. Первое решение. Пусть U , V – проекции A и B на PC и PD

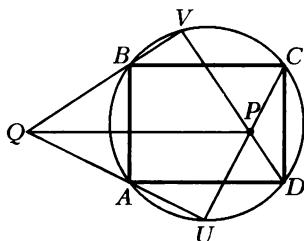


Рис. 103

соответственно. Тогда U и V лежат на описанной окружности $ABCD$, и, применив к ломаной $AUCBVD$ теорему Паскаля, получим утверждение задачи (рис. 103).

Второе решение. Так как $ABCD$ – прямоугольник, скалярные произведения $(\overline{PA}, \overline{PC})$ и $(\overline{PB}, \overline{PD})$ равны. Но $(\overline{PA}, \overline{PC}) = (\overline{PC}, \overline{PA}) + (\overline{PC}, \overline{AQ}) = (\overline{PC}, \overline{PQ})$. Аналогично, $(\overline{PB}, \overline{PD}) = (\overline{PD}, \overline{PQ})$. Следовательно, $(\overline{PQ}, \overline{CD}) = 0$.

Третье решение. Пусть Q' – образ Q при переносе на вектор BC . Тогда $CQ' \parallel BQ \perp DP$, $DQ' \perp CP$. Следовательно, P – ортоцентр треугольника CDQ' , и $PQ' \perp CD$.

13. Первое решение. Пусть Z – точка пересечения AB и UV . Применяя теорему синусов к треугольни-

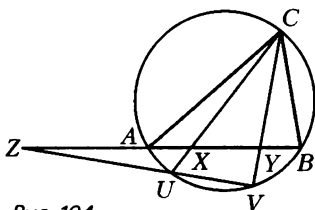


Рис. 104

кам ZAU и ZBV , получаем (рис.104)

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{AU \sin \angle AUZ}{BV \sin \angle BVZ} = \frac{AU \sin \angle ACY}{BV \sin \angle BCX} = \frac{\sin \angle ACX \sin \angle ACY}{\sin \angle BCX \sin \angle BCY}.$$

Из треугольника ACX имеем $\sin \angle ACX = \frac{AX}{AC} \sin \angle AXC$. Из этого и трех аналогичных соотношений получаем, что $\frac{ZA}{ZB} = \frac{BC^2}{AC^2}$, т.е. не зависит от выбора точек X, Y .

Второе решение. Точка C' , симметричная C относительно серединного перпендикуляра к AB , лежит на описанной окружности треугольника ABC . Пусть касательная в этой точке пересекает AB в точке Z . Проведем через Z произвольную секущую к окружности, пересекающую ее в точках U, V , и найдем точки X, Y пересечения прямых CU, CV с AB . Имеем

$$\frac{AX}{BX} = \frac{S_{ACU}}{S_{BCU}} = \frac{AC \cdot AU}{BC \cdot BU} = \frac{AC \cdot BC'}{BC \cdot AC'}.$$

Аналогично

$$\frac{AY}{BY} = \frac{AV \cdot BC'}{BV \cdot AC'}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{AX \cdot AY}{BX \cdot BY} = \frac{AU}{BV} \cdot \frac{AV}{BU} \left(\frac{BC'}{AC'} \right)^2.$$

Из подобия треугольников ZAU и ZVB следует, что $\frac{AU}{BV} = \frac{ZU}{ZB}$, а из подобия треугольников ZAV и ZUB вытекает, что $\frac{AV}{BU} = \frac{ZV}{ZB}$.

Кроме того, $ZU \cdot ZV = ZC'^2$. Следовательно,

$$\frac{AX}{BX} \frac{AY}{BY} = \left(\frac{ZC' \cdot BC'}{ZB \cdot AC'} \right)^2.$$

Из подобия треугольников ZAC' и $ZC'B$ получаем, что правая часть этого соотношения равна 1. Значит, $AX = BY$ и точка Z является общей точкой прямых из условия задачи.

14. Первое решение. Пусть L – точка пересечения диагоналей трапеции. Применяя теорему синусов к треугольникам AQD , AQB , ALD , ALB , получим, что $BL/DL = (AB/AD)^2$. Следовательно, $BC/AB = AB/AD$ и $CL/AL = (BC/AB)^2$, что равносильно утверждению задачи.

Второе решение. Пусть L и M – середины AB и AD соответственно. Тогда, так как $PL \parallel AD$, $QM \parallel AB$, то $\angle AQN = \angle QAB = \angle CAD = \angle APL$, и значит, треугольники APL и AMQ подобны (рис.105). Следовательно, $AP/AQ = AL/AM = AB/AD$. Поэтому треугольники ABP и ADQ подобны, т.е. $\angle ABP = \angle ADQ = \angle CBQ$.

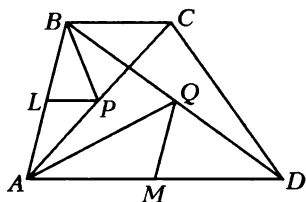


Рис. 105

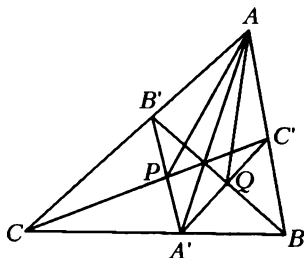


Рис. 106

15. Применяя теорему синусов к треугольникам $AC'Q$ и $AA'Q$, получаем (рис.106)

$$\frac{\sin \angle C'AQ}{\sin \angle A'AQ} = \frac{C'Q}{A'Q} \cdot \frac{AA'}{AC'} = \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{AA'}{AC'}.$$

Аналогично

$$\frac{\sin \angle B'AP}{\sin \angle A'AP} = \frac{CA'}{CB'} \cdot \frac{AA'}{AC'}.$$

По теореме Чевы эти отношения равны, что равносильно утверждению задачи.

16. **Первое решение.** Пусть C – вершина данного угла. Рассматривая центральные проекции прямой AB на прямую AC из точек B_1 , B_2 , получаем равенство двойных отношений (рис.107)

$$(AP; MB) = (AA_1; A_2C) = (AC_2; A_1A) = (BQ; MA),$$

что равносильно утверждению задачи.

Второе решение. Сделаем центральную симметрию относительно точки M . Пусть точки A_1 и B_2 переходят в точки A'_1 и B'_2 соответственно. Надо доказать, что прямые AB , A_2B_1 и $B'_2A'_1$ пересекаются в одной точке. Это следует из теоремы Дезарга, примененной к треугольникам $AA_2B'_2$ и $BB_1A'_1$. Так как точки пересечения

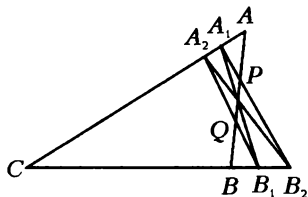


Рис. 107

прямых AA_2 и BB_1 , $A_2B'_2$ и $B_1A'_1$, AB'_2 и BA'_1 лежат на одной прямой, то AB , A_2B_1 и $B'_2A'_1$ пересекаются в одной точке.

Третье решение. Сделаем центральную симметрию относительно точки M . Пусть точки A_1 и B_2 переходят в A'_1 и B'_2 соответственно. Проведем через точку M прямую, параллельную BC . Из подобия треугольников следует, что $\frac{B_2A_2}{A_2M} = \frac{2B'_2A}{BC}$, $\frac{MA'_1}{A'_1B_1} = \frac{BC}{2BB_1}$ и $\frac{B_1X}{XB'_2} = \frac{B_1B}{B'_2A}$, где X — точка пересечения прямых AB и $B_1B'_2$. Перемножив, получаем $\frac{B'_2A_2}{A_2M} \cdot \frac{MA'_1}{A'_1B_1} \cdot \frac{B_1X}{XB'_2} = 1$. Из теоремы Чевы, примененной к треугольнику $MB_1B'_2$, следует, что прямые MX , B_1A_2 и $B'_2A'_1$ пересекаются в одной точке, что и требовалось.

17. Все треугольники, кроме равнобедренных неостроугольных.

Если треугольник ABC остроугольный, то радиусы описанных окружностей треугольников ABH , BCH и CAH , где H — ортоцентр, равны.

Пусть $\angle C \geq 90^\circ$ и $AC > BC$. Возьмем на стороне AC такую точку D , что $AD = BD$, а на стороне AB такую точку E , что

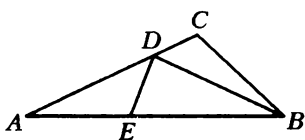


Рис. 108

$\angle AED = \angle C$ (это возможно, так как $\angle DAB = \angle A < \angle C$). По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников ADE , BDE и BDC равны (рис.108).

Пусть $\angle C \geq 90^\circ$ и $AC = BC$.

Покажем, что треугольник ABC нельзя разрезать требуемым образом. Если разрезание осуществляется из внутренней точки, то радиусы получившихся треугольников могут быть равны только, если точка является ортоцентром, что невозможно. Если же треугольник разрезается

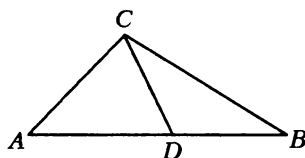


Рис. 109

чевианой на два, а затем один из этих двух еще раз на два, то треугольник, который разрезается второй чевианой, должен быть равнобедренным, следовательно, первый разрез нужно производить отрезком CD , где $AD = AC$. Но тогда при любом разрезании треугольника

ACD из вершины A радиусы окружностей, описанных около полученных треугольников, будут меньше радиуса описанной окружности треугольника BCD (рис.109).

18. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC , H – ортоцентр, C_0 – середина стороны AB . Тогда $\overline{CH} = 2\overline{OC_0}$, и так как C_0 лежит внутри описанной окружности, $CH < 2OC$. Точки, удовлетворяющие этому условию, лежат вне окружности, диаметрально противоположными точками которой являются точка M , делящая отрезок OH в отношении $1 : 2$ (центр тяжести треугольника), и точка M' , симметричная H относительно O . Для таких точек C искомый треугольник строится следующим образом: построим точку C_0 как образ C при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$, проведем через нее прямую, перпендикулярную CH , и найдем точки A, B пересечения этой прямой и окружности с центром O и радиусом OC . Однако это построение может привести к вырожденному треугольнику, у которого точки A, B, C лежат на одной прямой. Это происходит, когда $\angle OC_0C = \angle MCH = 90^\circ$, т.е. точка C лежит на окружности с диаметром MH . Исключением является сама точка H , для которой искомый треугольник существует, – это может быть любой прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диаметр окружности с центром O и радиусом OH . Таким образом, искомое ГМТ – это внешность окружности с диаметром MM' , исключая окружность с диаметром MH , но включая точку H (рис.110).

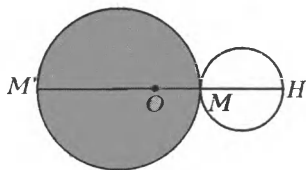


Рис. 110

19. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника PAQ . Имеем $\angle MCB = \angle MBP = \frac{1}{2} \angle MPA = \angle IPQ$. Аналогично $\angle MBC = \angle IQP$. Следовательно, $\triangle IPQ \sim \triangle MCB$, откуда $\frac{S_{IPQ}}{S_{MCB}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$, где $x = PQ$, $a = CB$. С другой стороны, отношение $\frac{S_{PAQ}}{S_{IPQ}}$ равно отношению периметра треугольника PAQ к стороне PQ , т.е. равно $\frac{2b}{x}$, где $b = AB = AC$ (поскольку периметр треугольника PAQ равен $2b$). Перемножая два отношения, получаем $\frac{S_{PAQ}}{S_{MCB}} = \frac{2bx}{a^2}$. Отношение $\frac{S_{PAQ}}{S_{MCB}}$ минимально, когда минимальна длина отрезка $x = PQ$.

Покажем, что наименьшее значение PQ достигается, когда $\triangle APQ$ равнобедренный. Пусть O – центр окружности, вписан-

ной в $\angle A$; R – ее радиус; M – середина дуги BC ; M' – другая точка на этой дуге; PQ и $P'Q'$ – отрезки соответствующих касательных между сторонами угла. Положим $\beta = \angle BOP (= \angle POM = \angle MOQ = \angle COQ)$, $\gamma = \angle BOP' (= \angle P'OM')$, $\delta = \angle COQ' (= \angle Q'OM')$. Тогда $PQ = PM + MQ = 2R \operatorname{tg} \beta$, $P'Q' = P'M' + M'Q' = R(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta)$. Так как $2\beta = \gamma + \delta$ и функция тангенса выпукла книзу на интервале $(0; \pi/2)$, то $PQ < P'Q'$, что и требовалось.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\triangle APQ$ – равнобедренный. Тогда $a = 2b \sin \frac{\alpha}{2}$; $AM = AO - OM = b \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$; $PQ = 2AM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2b \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$. Подставляя полученные выражения в неравенство $\frac{2bx}{a^2} < 1$, получаем:

$$\alpha > 2 \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

20. Пусть ABC – основание пирамиды, стороны AC , BC видны из ее вершины S под прямыми углами. Тогда S лежит на линии пересечения сфер с диаметрами AC и BC , т.е. на окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной основанию, с диаметром CD , где D – середина AB . Максимум объема достигается, когда S – наиболее удаленная от плоскости ABC точка этой окружности. При этом высота пирамиды равна $CD/2$, а ее объем $1/16$.

21. $8/\pi$.

Первое решение. Горизонтальные сечения камеры являются прямоугольниками с периметрами, равными удвоенному диаметру трубы. Для каждого такого прямоугольника угол между его плоскостью и касательной к поверхности камеры один и тот же во всех точках. Середины сторон этих прямоугольников при перемещении сечения описывают четверти окружности трубы. Поэтому площадь поверхности камеры равна площади поверхности тетраэдра, грани которого – равные равнобедренные треугольники с основанием, равным диаметру трубы, и высотой, равной четверти ее окружности.

Второе решение. Будем называть касающиеся друг друга цилиндры продольными, а перпендикулярный им – поперечным. Очевидно, что плоскость, касающаяся продольных цилиндров по общей образующей, и вертикальная плоскость, проходя-

щая через ось поперечного цилиндра, являются плоскостями симметрии камеры и разрезают ее на четыре равные части. Рассмотрим одну из таких четвертей. Ее граница состоит из двух кусков: части поверхности продольного цилиндра, лежащей внутри половины поперечного, и части поверхности поперечного цилиндра, лежащей между продольным и касательной к нему вертикальной плоскостью. Линия пересечения цилиндров является эллипсом и лежит в вертикальной плоскости, при симметрии относительно которой цилиндры переходят друг в друга. Образ при этой симметрии части поверхности камеры, лежащей на продольном цилиндре, дополняет часть, лежащую на поперечном, до криволинейного прямоугольника со сторонами, равными половине диаметра и четверти окружности цилиндра. Соответственно, площадь поверхности камеры равна учетверенной площади такого прямоугольника.

Финальный тур

8 класс

1. В зеркалах заднего вида водитель должен видеть дорогу сзади автомобиля. Для этого зеркало со стороны водителя должно располагаться почти перпендикулярно оси автомобиля, а с противоположной стороны – под углом, примерно равным 45° . Следовательно, у автомобиля на рисунке руль справа.

2. Первое решение. Так как треугольник ABC прямоугольный, вершина B лежит на прямой, проходящей через C и перпендикулярной AC . Кроме того, при симметрии относительно биссектрисы угла B точка A переходит в лежащую на этой же прямой точку A' , такую что $BA' = BA$. Для любой лежащей на биссектрисе точки L имеем $LA = LA'$, а поскольку $BA > BC$, точки A' и L лежат по разные стороны от прямой AC (рис.111). Таким образом, получаем следующее построение.

Проведем через C прямую l , перпендикулярную AC .

Проведем окружность с центром L и радиусом LA и найдем точку A' ее пересечения с l , лежащую с L по разные стороны от AC .

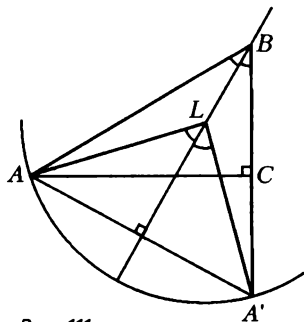


Рис. 111

Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AA' и найдем точку B его пересечения с l .

Задача имеет решение тогда и только тогда, когда $AL > CL$ и $\angle ACL < 90^\circ$.

Второе решение. Мы знаем прямую BC – это перпендикуляр к AC , проведенный через C . Построим окружность с центром в точке L , касающуюся BC . Так как BL – биссектриса, то эта окружность касается также и AB . Тогда точка B – это точка пересечения BC и луча из точки A , касающегося нашей окружности. При этом точка пересечения AL и BC лежит на отрезке BC (рис.112). Такой касательный луч только один (или его вовсе нет).

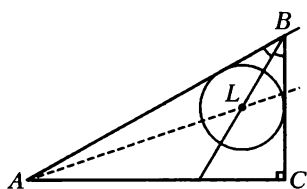


Рис. 112

Построение проходит, когда L и A лежат по одну сторону от BC , а диаметр окружности меньше AC , т.е. как раз когда $AL > CL$ и $\angle ACL < 90^\circ$.

Замечание. Если точке L разрешить лежать на *продолжении* биссектрисы (или хотя бы на луче биссектрисы, а не на отрезке!), то решений будет чаще всего два (соответствующих двум касательным).

Третье решение. Аналогично строим прямую BC . Пусть K – точка пересечения AL и BC . Тогда BL – биссектриса в треугольнике ABK , и B лежит на окружности Аполлония для отрезка AK и точки L внутри него. При этом опять надо из двух точек пересечения брать дальнюю от C .

3. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Если, например, угол AOB тупой, то он больше любого из углов треугольника BOC , т.е. треугольники AOB и BOC не могут быть подобны. Следовательно, диагонали четырехугольника перпендикулярны.

Из подобия прямоугольных треугольников AOB и BOC следует, что угол OAB равен либо углу OCB , либо углу OBC . В первом случае диагональ BD является серединным перпендикуляром к AC , т.е. осью симметрии четырехугольника и, значит, разрезает его на два равных треугольника. Во втором случае угол B прямой.

Рассуждая аналогично, получаем, что если ни одна из диагоналей не является осью симметрии четырехугольника, то все его углы прямые, а так как диагонали перпендикулярны, то четырехугольник – квадрат. Но диагональ квадрата является его осью симметрии – противоречие.

4. Пусть C_0 – середина стороны AB треугольника ABC , A_1 , B_1 – основания высот, опущенных на стороны BC , AC . Так как треугольники ABA_1 , ABB_1 – прямоугольные, их медианы A_1C_0 , B_1C_0 равны половине гипотенузы AB . Следовательно, если для данных точек $C_0A_1 \neq C_0B_1$, то искомое ГМТ – пустое множество. Это же верно и в случае, когда C_0 – середина A_1B_1 , ибо $A_1B_1 = AB \cos \angle C < AB$.

Если же $A_1B_1C_0$ – равнобедренный треугольник, то точки A , B лежат на окружности ω с центром C_0 и радиусом $C_0A_1 = C_0B_1$, причем являются концами диаметра этой окружности. Если треугольник ABC остроугольный, то его ортоцентр H является пересечением хорд AA_1 и BB_1 этой окружности (рис.113). Тогда угол A_1HB_1 равен полусумме дуг A_1B_1 и AB , т.е. $90^\circ + \frac{\angle A_1C_0B_1}{2}$. Следовательно,

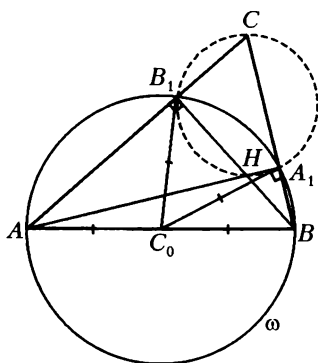


Рис. 113

но, точка H лежит на дуге окружности с концами A_1 , B_1 , вмещающей этот угол. Аналогично, если треугольник ABC тупоугольный, то H лежит на дополнительной дуге этой же окружности. Если же AB – катет прямоугольного треугольника, то его ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла, т.е. с одной из точек A_1 , B_1 , и значит, также лежит на этой окружности.

С другой стороны, если мы возьмем точку H на нашей окружности, то прямые A_1H и B_1H пересекают окружность ω в диаметрально противоположных точках. Тогда это – точки A и B , а C есть пересечение AB_1 и AA_1 ; таким образом, треугольник ABC существует для любой точки H нашей окружности. Следовательно, искомым ГМТ будет вся окружность.

5. Если $AA' = BB'$, то $A'M = AA'/3 = BB'/3 = BM/2$. Отсюда и из того, что $\angle A'MB = 60^\circ$, получаем, что $\angle BA'M = 90^\circ$. Аналогично $\angle AB'M = 90^\circ$.

Пусть теперь $AA' > BB'$, X – проекция B на AA' , Y – проекция A на BB' (рис.114). Тогда $MX = MB/2 < MA'$, $MY = MA/2 >$

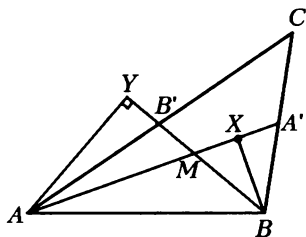


Рис. 114

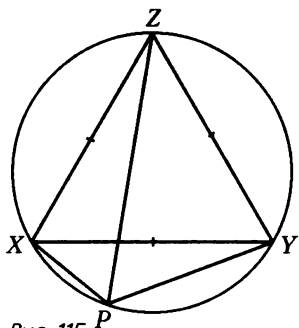


Рис. 115

XPZ и XPY сторона XP общая, $XZ = XY$ и $\angle PZX = \angle PYX$. Аналогично находятся равные элементы в треугольниках PXY и PYZ .

$> MB'$ и, следовательно, $\angle BA'M < 90^\circ < \angle AB'M$.

6. Да, существуют. Например, пусть XYZ – правильный треугольник, P – точка на дуге XY описанной около него окружности, отличная от середины дуги (рис.115). Тогда треугольники XPY , YPZ , ZPX попарно не равны. При этом в треугольниках XPZ и YPZ сторона PZ общая, $XZ = YZ$ и $\angle XPZ = \angle YPZ = 60^\circ$. В треугольниках

9 класс

1. **Первое решение.** Пусть l – касательная к окружности, вписанной в треугольник ABC , параллельная AC ; l_1 , l_2 – касательные к вписанной окружности четырехугольника, параллельные l . Рассмотрим гомотегию с центром B , переводящую окружность, вписанную в треугольник ABC , во вписанную окружность четырехугольника.

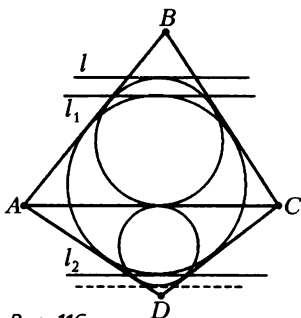


Рис. 116

Она переводит прямые l и AC в l_1 и l_2 соответственно. Поскольку AC лежит ближе к B , чем l_2 , то l лежит ближе к B , чем l_1 , т.е. вписанная в четырехугольник окружность не пересекает прямой l . Аналогично она не пересекает параллельной AC прямой, касающейся окружности, вписанной в треугольник ACD , и, значит, лежит внутри полосы, образованной этими двумя прямыми. Но ширина этой полосы равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники (рис.116).

Второе решение. Пусть r , r_1 , r_2 – радиусы вписанных окружностей четырехугольника $ABCD$ и треугольников ABC , ACD соответственно; p , p_1 , p_2 – их полупериметры. Тогда $p > p_1$, $p > p_2$ и

$$pr = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = p_1 r_1 + p_2 r_2 < p(r_1 + r_2).$$

Третье решение. Пусть диагонали пересекаются в точке O .

Проведем касательную l_1 ко вписанной в $ABCD$ окружности ω , параллельную AC и отделяющую B от AC . Такая, очевидно, есть. Тогда из гомотетии, переводящей ω в окружность, вписанную в ABC , имеем, что коэффициент гомотетии r_2/r больше, чем отношение расстояний от D до O и до B , т.е. больше DO/BD . Из аналогичных соображений $r_1/r > BO/BD$. Складывая, получаем требуемое.

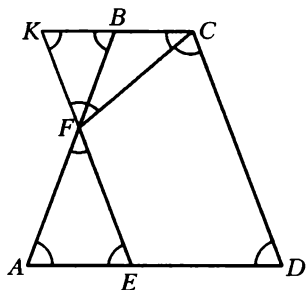


Рис. 117

2. Первое решение. Из условия задачи следует, что $\angle DCF = \angle CDA = \angle DAB = \angle FEA$ (рис. 117). Следовательно, $\angle BCF = \angle AFE$ и

$$\frac{BF}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle CBF} = \frac{\sin \angle AFE}{\sin \angle FEA} = \frac{AE}{AF},$$

что равносильно утверждению задачи.

Второе решение. Пусть прямая EF пересекает BC в точке K . Тогда $\angle FKC = \angle FEA = \angle CDA = \angle BAD = \angle KFC$, поэтому равнобедренные треугольники CFK и FAE подобны, и $CF/AF = FK/AE = FB/AE$. Отсюда $DE \cdot AE = CF \cdot AE = FB \cdot AF$, что и требовалось.

3. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ACF . Тогда O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам AC , CE , EA , которые совпадают с биссектрисами углов B , D , F шестиугольника. Кроме того, из симметрии имеем $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle DCO = \angle DEO$, $\angle FAO = \angle FEO$. Так как попарные суммы этих углов по условию равны, то равны и они сами, т.е. AO , CO , EO – тоже биссектрисы углов шестиугольника (рис. 118) и O – центр вписанной в него окружности. Значит, по теореме Бриансона главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

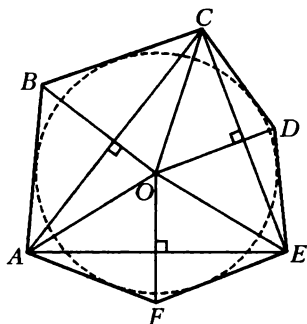


Рис. 118

4. Первое решение. Пусть AA_1 , BB_1 – высоты в треугольнике ABC . Тогда $\angle A'AA_1 = \angle PAH = \angle PBH = \angle B'BB_1$. Следовательно, треугольники $A'AA_1$ и $B'BB_1$ подобны и отношение

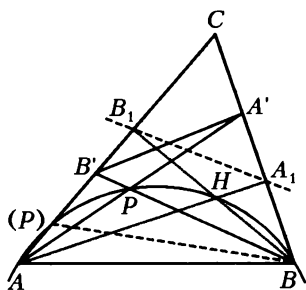


Рис. 119

$A'A_1/B'B_1$ не зависит от точки P . Значит, когда точка A' движется по прямой BC с постоянной скоростью, точка B' движется по прямой AC также с постоянной скоростью и середина отрезка $A'B'$ тоже движется по прямой. Взяв в качестве P точки пересечения окружности с AC и BC , отличные от вершин треугольника, убеждаемся, что эта прямая совпадает с A_1B_1 (рис.119).

Второе решение. Опять заметим, что треугольники AA_1A' и BB_1B' подобны с коэффициентом подобия $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$. Таким образом, $\frac{A_1A'}{B_1B'} = \frac{AC}{BC}$, а значит, отношение расстояний от A' и B' до A_1B_1 равно

$$\frac{A_1A' \sin \angle CA_1B_1}{B_1B' \sin \angle CB_1A_1} = \frac{AC \sin \angle CAB}{BC \sin \angle CBA} = 1,$$

т.е. середина $A'B'$ лежит на A_1B_1 .

Наоборот, для каждой точки на прямой A_1B_1 можно построить хорду $A'B'$ угла BAC , которая делится этой точкой пополам. Тогда $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC}$, и все рассуждения проходят в обратную сторону.

5. Первое решение. Пусть C_0 – середина стороны AB треугольника ABC , C_1 , C_2 – основания проведенных к этой стороне высоты и биссектрисы, C_3 , C_4 – точки ее касания с вписанной и внеписанной окружностями. Тогда $C_0C_3 = C_0C_4$. Перпендикуляры к AB , проведенные из точек C_1 , C_3 , C_4 , пересекают биссектрису угла C в вершине и центрах I , I' вписанной и внеписанной окружностей. Так как точки C и C_2 являются центрами гомотетии этих окружностей, $CI/C_2I = C'I'/C_2I'$. Значит, $C_1C_3/C_2C_3 = C_1C_4/C_2C_4$, т.е. $C_0C_3^2 = C_0C_1 \cdot C_0C_2$.

Пусть теперь даны точки I , C_0 , C_1 . Тогда найдем C_3 как проекцию I на C_0C_1 и C_2 , пользуясь полученным выше соотношением. Теперь точка C находится как пересечение C_2I и перпендикуляра к C_0C_1 , проведенного через C_1 . Далее, точка C' пересечения CI и перпендикуляра к C_0C_1 , проведенного через C_0 , лежит на описанной окружности треугольника (рис.120). Центр этой окружности является пересечением $C'C_0$

и серединного перпендикуляра к CC' ; поэтому, проведя эту окружность и найдя точки ее пересечения с C_0C_1 , мы построим искомым треугольник.

Второе решение. Пусть M , H – основания медианы и высоты из вершины C треугольника ABC , I – центр вписанной окружности, C' и C'' – точки касания вписанной и внеписанной окружностей со стороной AB , K – точка на вписанной окружности, диаметрально противоположная C' . Из гомотетии, переводящей вписанную окружность во внеписанную, получаем, что C , K , C'' лежат на одной прямой. Далее, $MC' = MC''$, поэтому IM – средняя линия в треугольнике KCC'' и $IM \parallel C'C$.

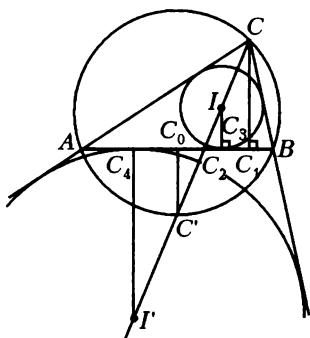


Рис. 120

Теперь последовательно восстанавливаем прямую $AB = MN$; вписанную окружность и точку C' ; точки C'' и K как симметричные C' относительно M и I ; вершину C как пересечение перпендикуляра к AB в точке H и прямой $C''K$; точки A и B как пересечения касательных ко вписанной окружности из точки C (рис.121).

6. $2n + 1$. Разрежем куб плоскостями, параллельными какой-нибудь грани, на слои $(2n + 1) \times (2n + 1) \times 1$. Так как любой полукирпич $2 \times 2 \times 1$ пересекает каждый слой по четному числу единичных кубиков, в каждом слое должен содержаться хотя бы один кубик, т.е. общее число кубиков не меньше, чем $2n + 1$. Покажем по индукции, что разрезание с $2n + 1$ единичным кубиком существует. Предположим, что куб с ребром $2n - 1$ разрезать требуемым образом можно. Рассмотрим оболочку, которая получается, если из куба с ребром $2n + 1$ удалить все внутренние кубики. Если удалить из этой оболочки два кубика, стоящие в противоположных углах, то оставшуюся часть можно разбить на 6 квадратов $2n \times 2n \times 1$, каждый из которых содержит один из оставшихся угловых кубиков. Следовательно, оболочку можно разрезать на полукирпичи и два единичных кубика, а внутренность куба по предположению индукции – на полукирпичи и $2n - 1$ кубик.

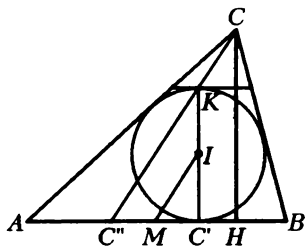


Рис. 121

1. Пусть биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке C_0 , а высоты, проведенные из вершин A, B – в точках A_1, B_1 . Так как $\angle A_1AC = \angle B_1BC = 90^\circ - \angle C$, точка C является серединой дуги A_1B_1 , не содержащей C_0 . Далее, прямая OC_0 является серединным перпендикуляром к AB , и значит, параллельна высоте, проведенной из C . Проведя эту высоту, найдем вторую точку C_1 ее пересечения с окружностью и затем найдем точки A, B как середины дуг A_1C_1 и A_1C_1 (рис.122).

Рис. 122

2. **Первое решение.** Так как ортоцентр треугольника ABC является центром вписанной окружности треугольника $A'B'C'$, точка, симметричная B' относительно AB , лежит на прямой $A'C'$, т.е. совпадает с K . Аналогично B' и L симметричны относительно BC . Отсюда следует, что $\angle AKC' = \angle AB'C' = \angle CB'A' = \angle CL'A'$, т.е. точка пересечения AK и CL лежит на серединном перпендикуляре к отрезку KL . Так как $BK = BB' = BL$, этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла KBL , которая в силу равенства $\angle OBA = \angle B'BC = 90^\circ - \angle C$ проходит через O (рис.123).

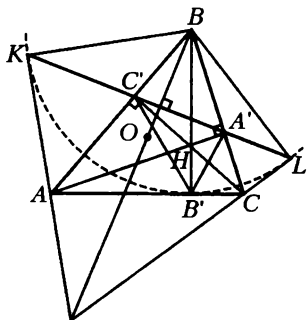


Рис. 123

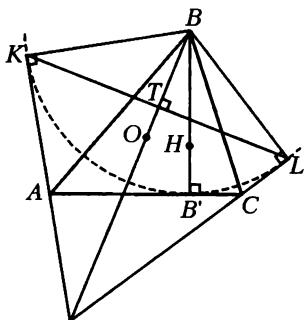


Рис. 124

Второе решение. Пусть BT – высота в $\triangle BA'C'$. Как известно, O лежит на BT . Из подобия $BA'C'$ и BCA имеем $BT/BK = BT/BV' = BA'/BC = \cos \angle ABC$, поэтому $\angle KBT = \angle LBT = \angle ABC$. Тогда $\angle KBA = \angle KBT - \angle ABT = \angle ABC - \angle CBB' =$

$= \angle ABB'$. Тогда точки K и B' симметричны относительно AB , поэтому AK (и аналогично CL) – касательные к нашей окружности в точках K и L . Они пересекаются на биссектрисе $\angle KBL$, т.е. на $BT = BO$ (рис.124).

3. Первое решение. Пусть C_1 – точка, диаметрально противоположная C , C_2 – точка, симметричная C_1 относительно центра O второй окружности. Тогда, так как $C_1P \perp AC$, а проекцией O на AC является середина отрезка PA , $C_2A \perp AC$. Аналогично, $C_2B \perp AB$. Значит, центром описанной около ABC окружности будет середина отрезка CC_2 . При этом CC_2 параллелен отрезку между центрами окружностей и вдвое его длиннее. Следовательно, искомым ГМТ будет окружность, полученная из той, на которой лежит точка C , переносом на

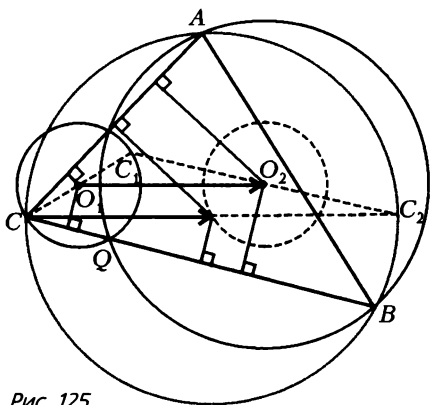


Рис. 125

вектор, определяемый центрами данных окружностей, без точек, соответствующих P и Q (рис.125).

Второе решение. Пусть O_1 и O_2 – центры исходных окружностей, а O – центр окружности ABC . Тогда проекции O_1 и O_2 на AC – середины отрезков CP и PA , поэтому проекция $\overline{O_1O_2}$ равна $\overline{CA}/2$. Аналогично, его проекция на CB есть $\overline{CA}/2$. Значит, проекции $\overline{O_1O_2}$ и \overline{CO} на эти прямые совпадают, а значит, $\overline{O_1O_2} = \overline{CO}$. Тогда для каждой точки C точка O получается переносом на вектор $\overline{O_1O_2}$, а значит, искомое ГМТ – окружность, полученная переносом первой окружности на этот вектор, кроме точек, соответствующих P и Q .

4. Первое решение. Покажем, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны. Действительно, если X, Y – проекции D' на BC и AB , а X', Y' – основания высот треугольника ABC , опущенных на эти же стороны, то отношение расстояний от O до AD и CD равно

$$\frac{\cos \angle ABD}{\cos \angle CBD} = \frac{\cos \angle CBD'}{\cos \angle ABD'} = \frac{BX}{BY} = \frac{CX'}{AY'} = \frac{\cos \angle BCA}{\cos \angle BAC},$$

т.е. отношению расстояний от O до AB и BC . Покажем, что по трем вершинам четырехугольника, обладающего этим свой-

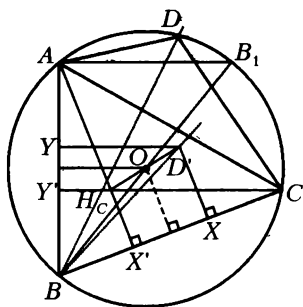


Рис 126

ством, четвертая определяется однозначно, т.е. оно равносильно как условию задачи, так и ее заключению (рис.126).

Итак, пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, в котором произведения расстояний от центра описанной окружности до противоположных сторон равны. Рассмотрим четырехугольник AB_1CD_1 , где B_1, D_1 – точки, диаметрально противоположные B, D . Очевидно, что, например, AB_1 равно удвоенному расстоянию от центра окружности до AB , т.е. наше свойство равносильно тому, что четырехугольник AB_1CD_1 – гармонический. Но в гармоническом четырехугольнике три вершины однозначно определяют четвертую.

Второе решение. Отметим на нашей окружности ω точки C'' и D'' такие, что BD и BD'' симметричны относительно биссектрисы угла B , а AC и AC'' симметричны относительно биссектрисы угла A . Тогда имеем $\sphericalangle AD'' = \sphericalangle DC = \sphericalangle C''B$, т.е. C'' и D'' симметричны относительно серединного перпендикуляра d к отрезку AB . Заметим, что точки B, D' и D'' лежат на одной прямой.

Выясним, как строятся точки C' и D' . Пусть отрезок $A'B'$ симметричен отрезку AB относительно O , а l – прямая, парал-

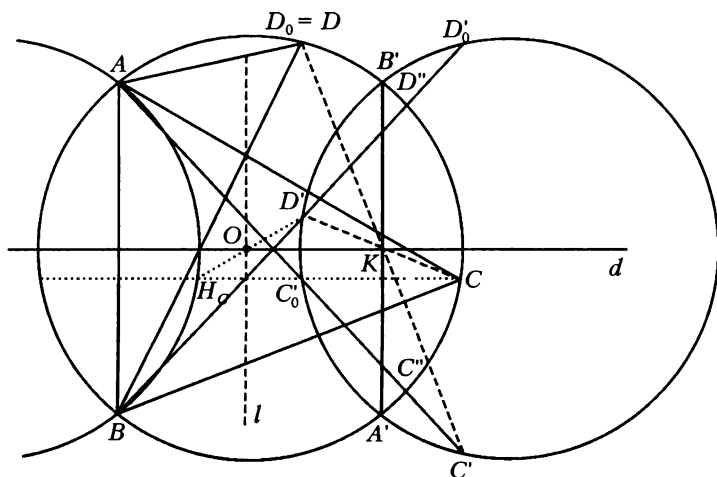


Рис. 127

тельная AB и проходящая через точку O – центр ω . Тогда вторая точка пересечения высоты CH_C треугольника ABC с ω получается из C симметрией относительно l , а ортоцентр H_C из этой точки – симметрией относительно AB ; наконец, D' получается из H_C симметрией относительно O . Композиция этих трех преобразований – симметрия относительно середины K отрезка $A'B'$ (рис.127). Итак, точки C' и D' лежат на окружности ω' , симметричной ω относительно K .

Суммируем полученные результаты. Нам нужно доказать, что точки A, C', C'' лежат на одной прямой, т.е. что прямые BD' и AC' симметричны относительно d . Покажем для этого, что точка C' при отражении относительно d попадает на прямую BD' , а точнее – во вторую точку пересечения BD' и ω' (обозначим эту точку через D'_0). Это эквивалентно тому, что D и D'_0 симметричны относительно $A'B'$.

Итак, пусть D_0 – точка, симметричная D'_0 относительно $A'B'$. Тогда

$$\cup AD'' = 2\angle ABD'' = 2\angle(BA', D'D'') = \\ = \cup A'D' + \cup B'D'_0 = \cup B'C' + \cup D_0B',$$

последнее равенство – в силу симметрий. Итак, $\cup AD'' = \cup D_0C$, что и означает $D = D_0$.

5. Первое решение. Нет. Рассмотрим, например, правильный икосаэдр. Пять его граней, имеющие общую вершину, являются боковыми гранями правильной пятиугольной пирамиды. Центры этих граней образуют правильный пятиугольник, стороны которого параллельны сторонам основания пирамиды. Поэтому ребра икосаэдра параллельны ребрам додекаэдра, образованного центрами его граней. Следовательно, параллельно перенеся ребра икосаэдра, можно получить додекаэдр.

Второе решение. Рассмотрим призму $ABCA'B'C'$ с разносторонним треугольником ABC в основании. Пусть B_1 – середина BB' , а точки A_1 и C_1 расположены на ребрах AA' и CC' так, что $AA_1 = C'C_1$ (рис.128).

Тогда в многогранниках $ABCA_1B_1C_1$ и $A'B'C'A_1B_1C_1$ ребра удовлетворяют условию. Легко подобрать параметры так, чтобы все ребра в каждом из них были различными, а двугранный угол при AB – непрямым. Тогда эти

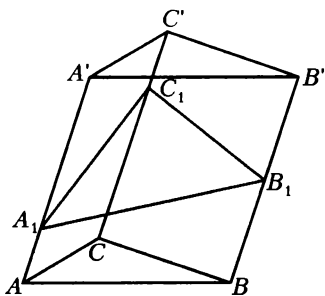


Рис. 128

многогранники не могут быть равными, так как двугранные углы при одинаковых ребрах AB и $A'B'$ дополнительные и потому различны.

6. Первое решение. Обозначим концентрические окружности через ω и ω' , их центр – через O , точки касания ω с b_1, b_2, c_1, c_2 – через B_1, B_2, C_1, C_2 , точки касания ω' с ними же – через B'_1, B'_2, C'_1, C'_2 . Все углы и дуги предполагаем ориентированными, углы рассматриваем по модулю $180^\circ \pmod{180^\circ}$, дуги – по модулю $360^\circ \pmod{360^\circ}$.

Рассмотрим пару b_i, c_k . Рассмотрим точку B'_i , диаметрально противоположную B_i на ω . Тогда $B_i C_k \perp B'_i C_k \parallel B'_i C'_k$ (последнее – так как $C_k C'_k$ и $B_i B'_i$ проходят через O). Пусть прямые $B'_i C'_k$ и $B_i C_k$ пересекаются в точке X_{ik} . Тогда

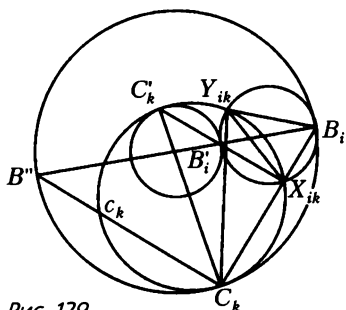


Рис. 129

$\angle B'_i X_{ik} B_i = \angle C'_k X_{ik} C_k = 90^\circ$, т.е. это одна из точек пересечения b_i и c_k . Другую точку их пересечения мы обозначим через Y_{ik} . Заметим, что дуги $B_i C_k, B_i X_{ik}$ и $X_{ik} C_k$ окружностей ω, b_i и c_i имеют одинаковую градусную меру, ибо они гомотетичны. Поэтому

$$\angle B_i Y_{ik} X_{ik} = \angle X_{ik} Y_{ik} C_k = \frac{1}{2} \cup B_i C_k \quad (\text{рис.129}).$$

Покажем, что точки X_{11}, X_{22}, Y_{12} и Y_{21} лежат на одной окружности. Имеем (напомним – $\pmod{180^\circ}$; см. рис.130)

$$\begin{aligned} \angle X_{11} Y_{12} X_{22} &= X_{11} Y_{12} B_1 + \angle B_1 Y_{12} C_2 + \angle C_2 Y_{12} X_{22} = \\ &= \frac{\cup C_1 B_1 + 2 \cup B_1 C_2 + \cup C_2 B_2}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\angle X_{22} Y_{21} X_{11} = \frac{\cup C_2 B_2 + 2 \cup B_2 C_1 + \cup C_1 B_1}{2},$$

и

$$\angle X_{11} Y_{12} X_{22} + \angle X_{22} Y_{21} X_{11} = \cup C_1 B_1 + \cup B_1 C_2 + \cup C_2 B_2 + \cup B_2 C_1 = 0,$$

что и требовалось.

Замечание. Приведем другой (может быть, более естественный) способ выяснить ту же информацию про точки X_{ik} и Y_{ik} . Здесь в одном месте намеренно пропущена деталь, которая впоследствии восстанавливается.

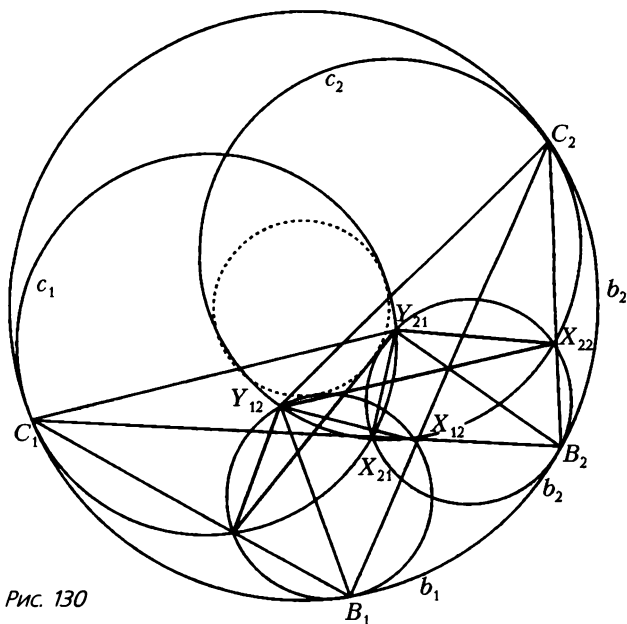


Рис. 130

Пусть X и Y – точки пересечения b_i и c_k . Тогда обозначим через Y^b и Y^c проекции точки Y на ω из точек B_i и C_k соответственно. Эти точки являются образами Y при гомотетиях, переводящих, соответственно, b_i и c_k в ω . Обозначим радиусы ω и ω' через R и r . Радиусы b_i и c_k равны $\frac{R-r}{2}$ и $\frac{R+r}{2}$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{YY^c}{YC_k} &= \frac{Y^c C_k}{YC_k} - 1 = \frac{R}{(R+r)/2} - 1 = \\ &= \left(\frac{R}{(R-r)/2} - 1 \right)^{-1} = \left(\frac{B_k Y^b}{Y B_k} - 1 \right)^{-1} = \\ &= \frac{Y B_k}{Y Y^b}, \end{aligned}$$

т.е. вроде бы $Y^b C_k \parallel Y^c B_j$. Тогда $\angle B_i Y C_k = \angle B_i C_k$, но такая точка на окружности b_i (отличная от B_i) одна, что странно, ибо рассуждения проходят и для точки X (рис.131).

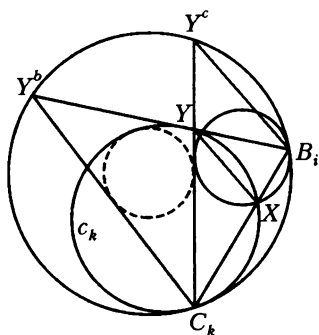


Рис. 131

На самом деле мы пользовались тем, что точка Y не лежит на прямой $B_i C_k$ (иначе все рассматриваемые точки лежат на этой прямой, и из равенства отношений нельзя вывести параллельность). Значит, одна из точек пересечения лежит на этой прямой. Для окружностей b_i и c_k обозначим через X_{ik} их точку пересечения, не лежащую на прямой $B_i C_k$, а через Y_{ik} — лежащую. Далее решение может быть продолжено как и выше.

Второе решение. Будем использовать два вспомогательных факта. Первый состоит в том, что геометрическое место точек, отношение степеней которых относительно двух данных окружностей равно заданному числу, является окружностью или прямой. Это можно доказать, например, методом координат. Напомним, что степенью точки M относительно окружности называется число $d^2 - r^2$, где r — радиус окружности и d — расстояние от ее центра до точки M . Второй вспомогательный факт сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B . Пусть P — четвертая вершина параллелограмма $O_2 A O_1 P$. Тогда для любой окружности с центром P , пересекающей обе окружности (первую — в точках M_1, N_1 , вторую — в точках M_2, N_2 , рис. 132), прямые $M_1 M_2$ и $N_1 N_2$ проходят через точку A и $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

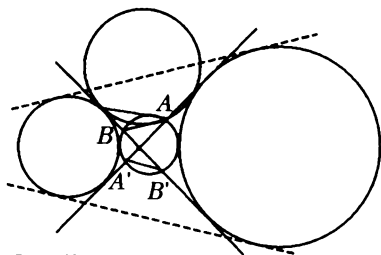


Рис. 132

Доказательство. Треугольники $PO_1 M_1$ и $M_2 O_2 P$ равны по трем сторонам, откуда $\angle M_1 O_1 P = \angle M_2 O_2 P$. Кроме того, $\angle PO_1 B = \angle PO_2 B$, поскольку $O_2 O_1 P B$ — равнобедренная трапеция. Складывая эти равенства, получаем $\angle M_1 O_1 B = \angle M_2 O_2 B$, поэтому $\cup B M_1 = \cup B M_2$. Следовательно, $\angle M_1 A B = \angle M_2 A B$, и прямая $M_1 M_2$ проходит через точку A . С прямой $N_1 N_2$ — аналогично. Далее, хорды $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$ стягивают на двух

окружностях одинаковые углы, следовательно, $\frac{M_1 N_1}{M_2 N_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Поскольку четырехугольник $M_1 M_2 N_1 N_2$ вписанный, треуголь-

ники $M_1 A N_1$ и $N_2 A M_2$ по-

добны с коэффициентом

$\frac{M_1 N_1}{M_2 N_2}$, поэтому $\frac{A N_1}{A M_2} =$

$= \frac{A M_1}{A N_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (см. рис.133).

Теперь начинаем решение задачи. Пусть P – общий центр данных окружностей, будем называть их большей и меньшей окружностью, окружности β_0, β_1 радиуса R касаются данных внутренним образом, а окружности γ_0, γ_1 радиуса r касаются большей окружности внутренним образом, а меньшей – внешним. Точки пересечения β_i и γ_k обозначим A_{ik}^0 и A_{ik}^1 (первая точка находится дальше второй от центра P). Проведем произвольную окружность с центром P , она пересекает каждую из окружностей β_i и γ_k в двух точках $b_i^s, s = 0, 1$ (соответственно c_k^s). При обходе окружности β_i в положительном направлении, начиная с точки ее касания с большей окружностью, сначала идет b_i^0 , потом b_i^1 . С точками c_k^s аналогично (рис.134). Все верхние индексы берутся по модулю 2, например $A_{10}^2 = A_{10}^0, c_1^3 = c_1^1$.

Покажем, что 4 точки A_{ik}^{i+k} ($i, k \in \{0, 1\}$) лежат на одной окружности. Пусть O_1, O_2 – центры окружностей β_0 и γ_0 соответственно. Тогда $O_2 A_{00}^0 O_1 P$ – параллелограмм, длины его сторон – r и R . По лемме 1 прямые $b_0^0 c_0^0$ и $b_0^1 c_0^1$ пересекаются в точке A_{00}^0 . Обозначим через \mathbf{b} окружность, касающуюся β_0 и β_1 в точках b_0^0 и b_1^1 соответственно, а через \mathbf{c} – окружность, касающуюся γ_0 и γ_1 в точках c_0^1 и c_1^0 соответственно. Предполагаем, что \mathbf{b} и \mathbf{c} не вырождаются в прямые. Пусть x – радиус окружности \mathbf{b} , взятый со знаком плюс, если эта окружность касается β_0 внешним образом, и со знаком минус, если внутренним. Аналогично, y – радиус окружности \mathbf{c} , взятый со знаком. Пусть также B – вторая точка пересечения прямой $b_0^0 A_{00}^0$ с

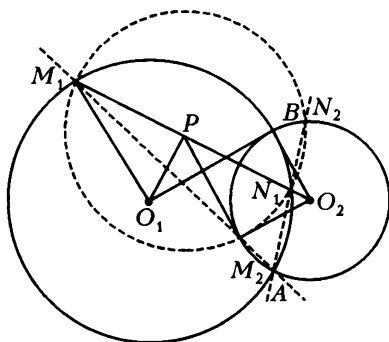


Рис. 133

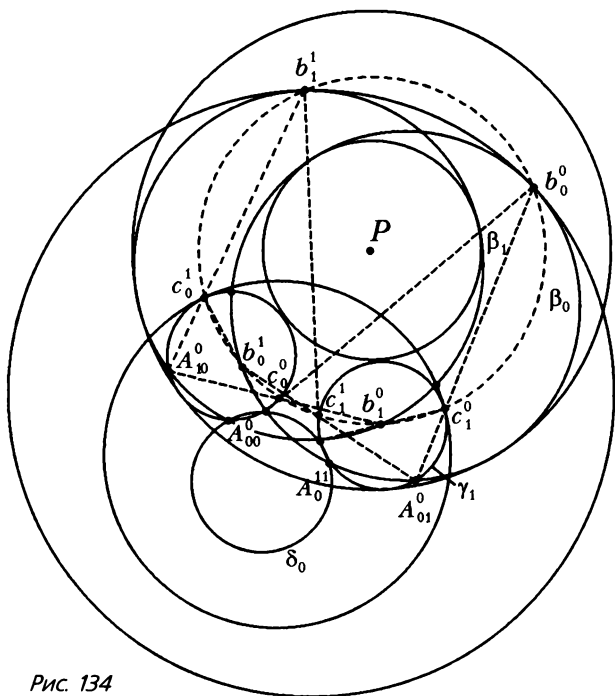


Рис. 134

окружностью **b**, а C – вторая точка пересечения прямой $c_0^1 A_{00}^0$ с окружностью **c**. В силу подобия окружностей имеем $b_0^0 B = \frac{x}{R} b_0^0 A_{00}^0$, следовательно, степень точки A_{00}^0 относительно **b** равна $A_{00}^0 b_0^0 \cdot A_{00}^0 B = \left(1 + \frac{x}{R}\right) (A_{00}^0 b_0^0)^2$. Аналогично, степень точки A_{00}^0 относительно **c** равна $\left(1 + \frac{y}{r}\right) (A_{00}^0 c_0^1)^2$. Согласно лемме 1 имеем $A_{00}^0 b_0^0 / A_{00}^0 c_0^1 = R/r$. Следовательно, отношение степеней точки A_{00}^0 относительно окружностей **b** и **c** равно $\frac{(R+r)R}{(r+y)r}$. Проведя то же рассуждение с точками A_{11}^0 , A_{10}^1 , A_{01}^1 , получаем, что у каждой из них отношение степеней относительно **b** и **c** равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Следовательно, эти 4 точки лежат на одной окружности.

Заочный тур

1. Нет. Если число сторон многоугольника нечетно, то каждая его диагональ параллельна какой-то стороне. Если же число сторон равно $2k$, то из каждой вершины выходит $2k - 3$ диагонали, из которых для $k - 2$ существуют параллельные им стороны. Поэтому диагоналей, параллельных сторонам, меньше половины.

2. Пусть радиусы двух окружностей с центром O равны R и r ($R > r$). Тогда есть два семейства касающихся их окружностей: с радиусами, равными $\frac{R+r}{2}$, и центрами, удаленными от O на $\frac{R-r}{2}$, и с радиусами, равными $\frac{R-r}{2}$, и центрами, удаленными от O на $\frac{R+r}{2}$. При этом любые две окружности из одного семейства симметричны относительно некоторой прямой, проходящей через O , а любые две окружности из разных семейств пересекаются или касаются. Отсюда вытекает следующее построение.

Если радиусы данных окружностей равны, то центр искомых концентрических окружностей лежит на прямой, относительно которой данные окружности симметричны. При этом любая точка O этой прямой, кроме точек пересечения данных окружностей, может быть таким центром. Действительно, проведем через O и центр одной из данных окружностей прямую и найдем точки A, B ее пересечения с этой окружностью (рис.135). Окружности с радиусами OA, OB – искомые.

Если радиусы данных окружностей различны, то центр искомых окружностей удален от центра каждой из данных

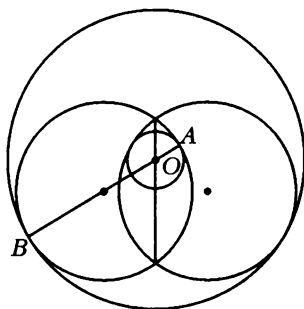


Рис. 135

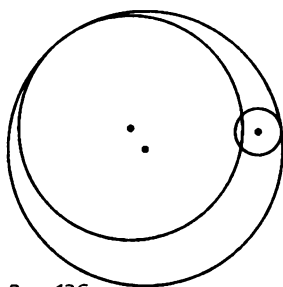


Рис. 136

окружностей на расстояние, равное радиусу другой. Таких точек существует две, если данные окружности пересекаются, и одна, если они касаются. При этом искомые окружности строятся так же, как в предыдущем случае (рис.136).

Таким образом, задача имеет бесконечно много решений, если данные окружности равны; два решения, если радиусы различные и окружности пересекаются; одно, если радиусы различны и окружности касаются и ни одного для различных не пересекающихся окружностей.

3. Треугольник можно разрезать на три треугольника, либо соединив внутреннюю точку с вершинами, либо сначала разрезав его на два треугольника прямой, проходящей через вершину, а затем так же разрезав один из полученных треугольников. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть треугольник ABC разрезан на три треугольника отрезками из точки M . Так как угол AMB больше любого из углов MAC , MBC , MCA , MCB , равенство треугольников возможно только при $\angle AMB = \angle BMC = \angle MCA = 120^\circ$. Но тогда $MA = MB = MC$, и исходный треугольник правильный.

2) Разрезать на два равных треугольника можно только равнобедренный треугольник. Поэтому один из треугольников, полученных при первом разрезании, должен быть равнобедренным, а второй – прямоугольным, равным «половине» первого. Отрезать же от исходного треугольника прямоугольный можно только одним из следующих трех способов:

– проведя в исходном треугольнике высоту. Но тогда второй треугольник тоже будет прямоугольным и первый не может быть равен его половине;

– проведя в тупоугольном треугольнике ABC через вершину тупого угла C прямую CD , перпендикулярную BC . Тогда, так как площадь треугольника BCD равна половине площади треугольника ACD , должны выполняться равенства $AD = CD = 2BD$, что невозможно, поскольку BD – гипотенуза треугольника BCD ;

– проведя в треугольнике с прямым углом C прямую BD . Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что $AD = BD = 2CD$ и, значит, $\angle B = 60^\circ$ (рис.137).

4. Прежде всего заметим, что биссектрисы смежных углов четырехугольника не могут быть параллельны, так как сумма этих углов

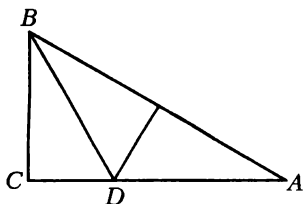


Рис. 137

меньше 360° . Если же параллельны, например, биссектрисы углов A и C четырехугольника $ABCD$, то $\frac{\angle A}{2} + \angle B + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ$ и $\angle B = \angle D$. Поскольку четырехугольник вписанный, эти углы прямые, и $AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2$.

5. Пусть O' – такая точка, что $AO = AO'$ и $\angle OAO' = 90^\circ$. Тогда $\angle O'AB = \angle OAD$ и, так как $AB = AD$, треугольники OAD и $O'AB$ равны. Следовательно, $O'B = OD$ и, зная длины отрезков OB , $O'B$, можно построить точку B , а затем и весь квадрат (рис.138). Задача имеет два решения, симметричных относительно прямой OA .

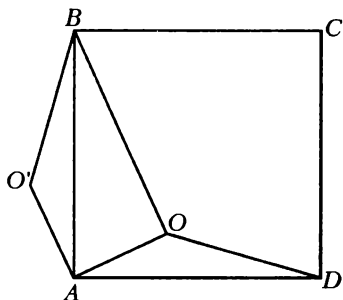


Рис. 138

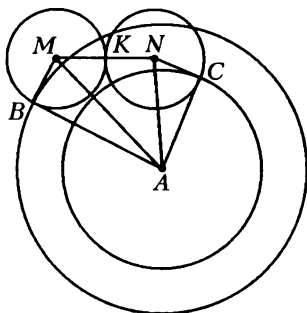


Рис. 139

6. Пусть M, N – центры касающихся окружностей. Тогда K – середина отрезка MN , $\angle ABM = \angle ACN = 90^\circ$, и $BM = MK = KN = NC$ (рис.139). Так как AK – медиана треугольника AMN , $AK^2 = \frac{2AM^2 + 2AN^2 - MN^2}{4} = \frac{AB^2 + AC^2}{2}$ не зависит от

выбора точек B, C . Следовательно, K лежит на фиксированной окружности с центром A . Вращая треугольник ABC вокруг A , можно получить любую точку этой окружности.

7. Если C совпадает с O , утверждение задачи очевидно, а если C – точка, диаметрально противоположная O , то $\angle CPO = \angle CQO = 90^\circ$, т.е. прямые CP, CQ касаются второй окружности и точки A, B совпадают с P, Q . В остальных случаях, так как $OP = OQ$, то CO – биссектриса угла ACB . При симметрии относительно CO прямые CP и CQ переходят друг в друга, а вторая окружность в себя, следовательно, точка P переходит либо в Q , либо в B . Но $CP \neq CQ$, так что первый случай невозможен. Значит, $CP = CB$. Аналогично $CQ = CA$. Отсюда вытекает равенство треугольников CAB и CQP , а

угольников, не примыкающих к вершинам прямоугольника, равна 3π . Если все такие углы расположены в точках на сторонах прямоугольника, то таких точек три и в каждой из них находится не более одной вершины тупого угла. Поскольку в вершинах прямоугольника тупых углов нет, получаем противоречие. Если же некоторые вершины треугольников лежат внутри прямоугольника, то получаем одну внутреннюю точку, в которой сходится не более трех тупых углов, и одну точку на стороне, т.е. общее количество тупых углов не превышает четырех, и опять получаем противоречие. Аналогично доказывается, что прямоугольник нельзя разрезать на два, три или четыре тупоугольных треугольника.

9. Пусть P – середина AC , L – точка пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам ABP , ABL , CBP , CBL , получаем, что $AL/CL = (AB/CB)^2$. Аналогично, $AL/CL = (AD/CD)^2$, т.е. $BC/CD = AB/AD = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle DBA} = \frac{\sin \angle CDP}{\sin \angle CBP}$.

Следовательно, прямые BP и DP симметричны относительно AC . Пусть X – вторая точка пересечения прямой BP с описанной окружностью треугольника ABC . Точка, симметричная X относительно серединного перпендикуляра к AC лежит как на PD , так и на BD , и, значит, совпадает с D . Таким образом, четырехугольник $ABCD$ – вписанный, и $AB \cdot CD = AD \cdot BC = (AC \cdot BD)/2$. Пусть прямая, симметричная AC относительно биссектрисы угла A , пересекает BD в точке Q . Тогда треугольники ABQ и ACD подобны, следовательно, $AB/AC = BQ/BD$ и $BQ = BD/2$ (рис.141).

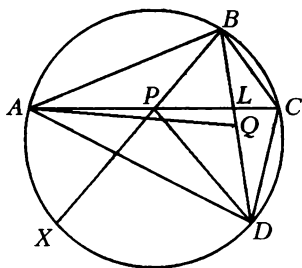


Рис 141

10. Очевидно, что середина отрезка BD равноудалена от проекций точек B и D на любую прямую. Докажем, что она равноудалена и от проекций X , Y точки B на IA и IC .

Так как $\angle BXI = \angle BYI = 90^\circ$, точки X , Y лежат на окружности с диаметром BI , т.е. серединный перпендикуляр к отрезку XY проходит через середину BI . Таким образом достаточно доказать, что $XY \perp ID$. Действительно, в этом случае серединный перпендикуляр к XY будет совпадать со средней линией треугольника BDI и, значит, пройдет через середину BD .

Так как точки B , I , X , Y лежат на одной окружности, угол

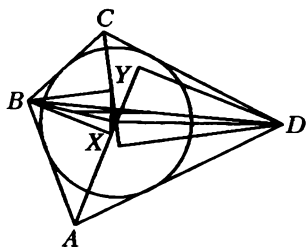


Рис. 142

между XY и XA равен углу между BY и BI , т.е. $\angle BIC = 90^\circ$. Следовательно, угол между XY и ID равен $\angle AID + \angle BIC = 90^\circ = 90^\circ$ (рис. 142).

11. Рассмотрим сначала случай, когда точки не лежат на одной прямой. Если, например, C и D лежат по одну сторону от прямой AB , то существует окружность ω , проходящая через C и D и касающаяся AB . Тогда

через A и B можно провести окружность достаточно большого радиуса, не пересекающую ω . Следовательно, отрезки AB и CD должны пересекаться. Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к этим отрезкам. Две окружности с центром O и радиусами OA и OC либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, точки A, B, C, D лежат на одной окружности. По теореме о радикальных осях трех окружностей общая хорда любых двух окружностей, проходящих через A, B и C, D соответственно, проходит через точку пересечения AB и CD .

Если же все данные точки лежат на одной прямой, то очевидно, что отрезки AB и CD пересекаются, а общая хорда окружностей пересекает прямую, на которой лежат точки, в точке P , принадлежащей обоим отрезкам и удовлетворяющей равенству $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Эти условия определяют точку P однозначно.

12. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника. Так как BI — биссектриса угла B равнобедренного треугольника A_1BC , $A_1I = IC$. Аналогично $A_2I = IB$. Следовательно,

$$A_1I^2 - A_2I^2 = IC^2 - IB^2 = (p - c)^2 - (p - b)^2 = a(b - c).$$

С другой стороны, если B_0, C_0 — середины AC и AB , то

$$\begin{aligned} OA_1^2 - OA_2^2 &= \\ &= OC_0^2 - OB_0^2 + A_1C_0^2 - A_2B_0^2 = \\ &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = \\ &= a(b - c). \end{aligned}$$

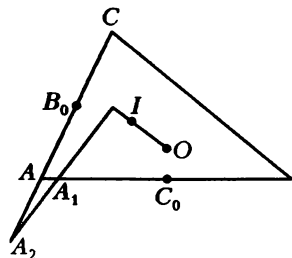


Рис. 143

Следовательно, прямые A_1A_2 и OI перпендикулярны (рис. 143). Аналогично получаем, что OI перпендикулярна двум другим прямым.

13. Так как точки касания сторон треугольника с внеписанными окружностями симметричны их точкам касания с вписанной окружностью относительно середин сторон, то $CA_1 = p - b$, $CB_1 = p - a$, $AB_1 = BA_1 = p - c$. Применяв теорему Менелая к треугольнику ACA_1 и прямой BB_1 , получаем, что $A_1N/AA_1 = (p - a)/p$. Гомотетия с этим коэффициентом и центром A переведет точку A_1 в точку P . Но отношение радиусов вписанной и внеписанной окружностей треугольника тоже равно $(p - a)/p$, значит, образ точки A_1 при этой гомотетии лежит на вписанной окружности (рис.144).

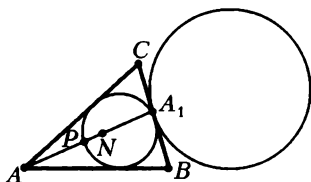


Рис. 144

14. 120° . Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC , H – его ортоцентр, и прямая OH параллельна биссектрисе угла C . Так как эта биссектриса пересекает описанную окружность в середине C' дуги AB , $OC' \perp AB$, т.е. четырехугольник $OC'SH$ – параллелограмм и $CH = OC' = R$. С другой стороны, $CH = 2R|\cos \angle C|$, значит, угол C равен 60° или 120° . Но в первом случае лучи CO и CH симметричны относительно биссектрисы угла C , так что прямая OH не может быть параллельна этой биссектрисе. Следовательно, $\angle C = 120^\circ$ (рис.145).

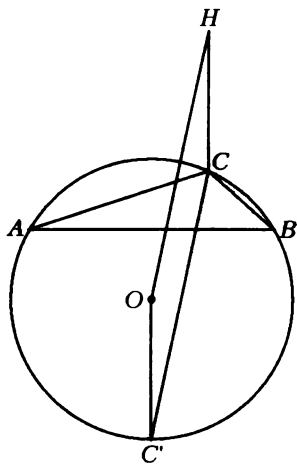


Рис. 145

15. Пусть A, B – точки пересечения искомой прямой с одной окружностью, C, D – с другой, M – середина отрезков AD и BC . Тогда степени точки M относительно окружностей равны, т.е. M лежит на их радикальной оси. Пусть L – середина отрезка между центрами окружностей. Так как проекциями центров на искомую прямую являются середины отрезков AB и CD , проекцией точки L на эту прямую будет точка M . Следовательно, $\angle LMP = 90^\circ$ и M лежит на окружности с диаметром LP . Таким образом, чтобы построить искомую прямую, надо найти точки пересечения этой окружности с радикальной осью. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

16. Точки X, Y являются центрами гомотетии каждой из

данных окружностей с касающейся. Следовательно, прямая XU проходит через центр гомотетии данных окружностей, т.е. точку пересечения AB с линией центров. Пусть Y' – отличная от Y

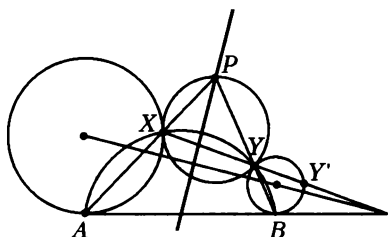


Рис. 146

точка пересечения этой прямой с второй окружностью. Тогда $BY' \parallel AX$ и $\angle XYB = \angle Y'BA = \pi - \angle BAX$. Поэтому четырехугольник $AXYB$ – вписанный и точка P пересечения прямых AX и BY является радикальным центром данных окружностей и окружности, описанной около этого четырехугольника, т.е. лежит на радикальной оси данных окружностей (рис.146). Очевидно, что любая точка радикальной оси принадлежит искомому ГМТ.

Очевидно, что любая точка радикальной оси принадлежит искомому ГМТ.

17. Отложим на продолжении стороны AB за точку B и на продолжении стороны AC за точку C отрезки $BC_1 = CB_1 = BC$.

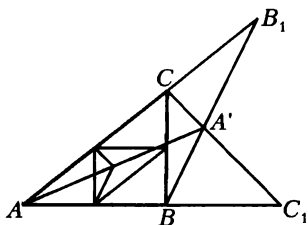


Рис. 147

Пусть A' – точка пересечения BB_1 и CC_1 . Тогда прямая AA' проходит через искомую точку (рис.147).

Действительно, так как треугольники BCB_1 и CBC_1 равнобедренные, прямые BB_1 и CC_1 параллельны биссектрисам углов C и B . Поэтому при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$ эти прямые перейдут в биссектрисы углов среднего треугольника, а точка A' – в искомый центр.

Аналогично, используя второй отмеченный на линейке отрезок, построим прямую, проходящую через B и исходную точку.

18. **Первое решение.** Пусть C – средний угол треугольника. Тогда $|b - c| + |c - a| = |a - b|$ и левая часть неравенства равна

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(a - b)^2 = 4ab - (a^2 + b^2 - c^2) = 2ab(2 - \cos \angle C).$$

Поскольку правая часть равна $2\sqrt{3}ab \sin \angle C$, данное неравенство равносильно следующему:

$$2 - \cos \angle C \geq \sqrt{3} \sin \angle C.$$

Но

$$\cos \angle C + \sqrt{3} \sin \angle C = 2 \cos \left(\angle C - \frac{\pi}{3} \right),$$

следовательно, данное неравенство всегда справедливо и обращается в равенство только при $\angle C = 60^\circ$.

Второе решение. Вновь полагая, что c — средняя сторона треугольника, обозначим $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, где p — полупериметр, и запишем левую часть в виде

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - (a - b)^2 + c^2 - (a - b)^2 &= 2ab + 4xy = \\ &= 2(x + z)(y + z) + 4xy = 2pz + 6xy. \end{aligned}$$

И поскольку правая часть равна $4\sqrt{3pxyz}$, неравенство принимает вид

$$pz + 3xy - 2\sqrt{3pxyz} = (\sqrt{px} - \sqrt{3xy})^2 \geq 0.$$

19. Точки M_1 , N_1 симметричны относительно прямой AB , так что M_1N_1 равно удвоенному расстоянию от M_1 до AB . Аналогично M_2N_2 равно удвоенному расстоянию от M_2 до BC . Кроме того, $CM_2 = CD = AB$, $AM_1 = AD = BC$, $BM_1 = BM_2$, и значит, треугольники ABM_1 и CM_2B равны. Поэтому искомое отношение, равное отношению высот этих треугольников, обратно отношению соответствующих сторон, т.е. равно b/a (рис.148).

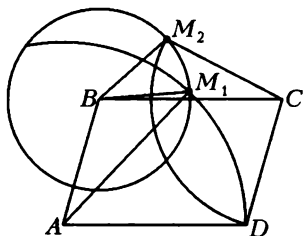


Рис. 148

20. а) Да. Пусть X , Y — две точки, делящие периметр многоугольника пополам и не являющиеся его вершинами, X' , Y' — точки на тех же сторонах, удовлетворяющие условию $XX' = YY'$, P — точка пересечения прямых XU и $X'Y'$. Так как каждая из этих прямых делит многоугольник на два равновеликих, площади треугольников PXX' и PYY' равны. А так как $XX' = YY'$, равны и высоты треугольников, опущенные на эти стороны. Кроме того, $\angle XPX' = \angle YPY'$, как вертикальные. Следовательно, эти треугольники равны. Если прямые XX' и YY' не параллельны, то отсюда следует равенство углов $PX'X$ и PYY' . Но при фиксированной паре X , Y это равенство не может выполняться для произвольных X' , Y' . Таким образом, когда одна из двух противоположных точек движется по стороне многоугольника, другая движется по параллельной стороне, причем длины этих сторон равны. Значит, многоугольник имеет центр симметрии.

Примечание. Приведенное выше рассуждение подразумевает, что никакие две стороны многоугольника не лежат на одной

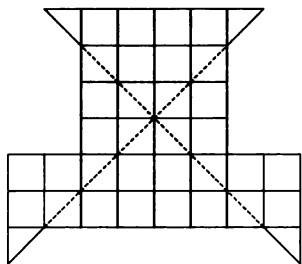


Рис. 149

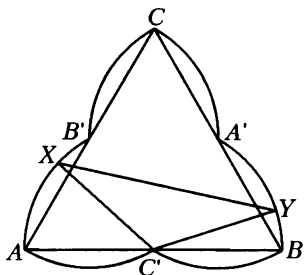


Рис. 150

прямой. Если это условие не выполняется, то многоугольник может обладать требуемым свойством и не иметь центра симметрии (рис.149).

б) Нет. Пусть, например, ABC – правильный треугольник, A' , B' , C' – середины его сторон. Проведем шесть дуг окружностей по 60° с центрами A' , B' , C' с концами в точках A , B , C , A' , B' , C' (рис.150). Пусть X , Y – пара точек, делящих периметр фигуры, ограниченной этими дугами, пополам, и точка X лежит, например, на дуге AB' . Тогда Y лежит на дуге $A'B$ и дуги AX и $A'Y$ равны. Так как дуги AB' и $A'B$ являются частями одной окружности с центром C' , это означает, что $\angle AC'X = \angle A'CY$. Следовательно, площадь фигуры $AXYB$ равна сумме площадей секторов $C'AX$ и $C'BY$, не зависящей от

положения точек X , Y , площади треугольника $C'XY$, также не зависящей от положения этих точек, и площади двух неизменных сегментов. Таким образом, эта площадь постоянна и, как нетрудно видеть, равна половине площади всей фигуры.

Примечание. Существуют даже выпуклые фигуры, обладающие указанным свойством. Например, фигура, ограниченная кривой

$$x = 12 \cos \varphi + \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi, \quad y = 12 \sin \varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

однако доказательство в этом случае существенно сложнее.

21. а) Верно. Пусть в треугольнике ABC $\angle A < \angle B \leq \angle C$. Тогда серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекают сторону AB . Отрезки этих перпендикуляров, лежащие внутри треугольника ABC , имеют равные проекции на прямые, перпендикулярные AB , но образуют с этими прямыми разные углы. Следовательно, они не равны.

Пусть теперь $\angle A \leq \angle B < \angle C$. Тогда серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают соответственно AC и AB и, значит, отрезают от треугольника ABC подобные, но не равные тре-

угольники. Отрезки перпендикуляров, лежащие внутри треугольника, являются соответствующими сторонами этих треугольников и, следовательно, не равны.

Отметим, что из приведенных рассуждений следует, что наименьшую длину имеет отрезок серединного перпендикуляра, проведенного к средней стороне треугольника.

б) Неверно. Например, рассмотрим треугольник с углами $\angle A = \pi/8$, $\angle B = \pi/4$, $\angle C = 5\pi/8$ и единичным радиусом описанной окружности. В нем серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону AC и его отрезок, лежащий внутри треугольника, равен $AB \operatorname{tg} \angle A/2 = \sin(5\pi/8) \operatorname{tg}(\pi/8) = \sin(\pi/8)$. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и длина соответствующего отрезка равна $BC \operatorname{tg} \angle B/2 = \sin(\pi/8)$. Таким образом, эти отрезки равны. Условию удовлетворяет также любой треугольник, в котором $\angle A < \angle B < \angle C$ и $\cos \angle A \operatorname{tg} \angle B = \sin \angle C$.

в) Нет. Если треугольник равнобедренный, то, как показано в п.а), отрезки серединных перпендикуляров к боковым сторонам короче высоты. Если же $\angle A < \angle B < \angle C$ и $\cos \angle A \operatorname{tg} \angle B = \sin \angle C$, то отношение отрезков перпендикуляров к наибольшей и средней сторонам треугольника равно отношению самих этих сторон, т.е.

$$\frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} = \frac{\cos \angle A}{\cos \angle B} = \frac{\cos \angle B}{\sqrt{1 - 2 \cos \angle B + 2 \cos^3 \angle B}}.$$

Исследовав правую часть этого равенства, можно убедиться, что ее максимум меньше, чем $4/3$.

22. а) 13. б) Произвольно большое.

а) Сечение куба плоскостью основания пирамиды пересекает все его грани и, значит, является выпуклым шестиугольником. Вершины основания лежат на сторонах этого шестиугольника, но не в его вершинах. Нетрудно видеть, что если на какой-то стороне лежит больше двух вершин основания, то соединить их несамопересекающейся ломаной, лежащей внутри шестиугольника, невозможно. Поэтому основание имеет не более 12 вершин, а пирамида — не более 13. Существование пирамиды с 13 вершинами очевидно.

б) В этом случае вершины основания могут лежать на прямых, содержащих стороны шестиугольника, и их количество может быть произвольно большим (рис.151).

23. Проведем через A прямую, параллельную линии центров дан-

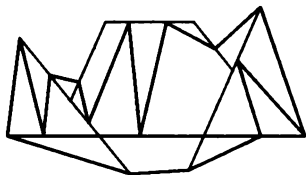


Рис. 151

Пусть X_1, X_2 – вторые точки пересечения окружности, проходящей через A и B , с данными окружностями; A' – вторая точка пересечения данных окружностей. Тогда O_1O_2 – средняя линия треугольника $A'CD$, т.е. $CB = BD = O_1O_2$. Следовательно, $O_1B = O_2D = O_2X_2$, $O_2B = O_1C = O_1C_1$. Кроме того, центр O окружности ABX_1X_2 равноудален от O_1 и O_2 , поэтому

Таким образом, треугольники O_1X_1B и O_2BX_2 равны, а значит, $BX_1 = BX_2$ (рис.152).

130

Финальный тур

8 класс

1. Да. См., например, рис.153.

2. Пусть L' – точка, симметричная L относительно AB (рис.154). Так как $\angle L'KA = 50^\circ = \angle KAL'$, $L'K = L'A = LA$. С другой стороны, $\angle CAL = 40^\circ = \angle ACL$, т.е. $AL = CL$. Из этих равенств следует, что $CK = LL' = 2LB$.

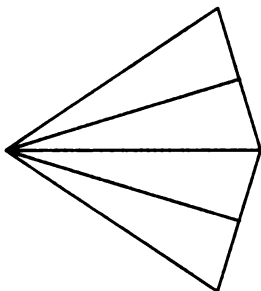


Рис. 153

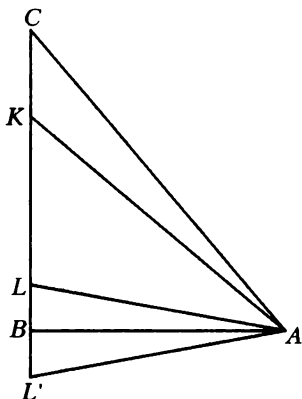


Рис. 154

3. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D$, O – точка пересечения диагоналей. Предположим, что $OB > OD$. Тогда точка D' , симметричная D относительно AC , лежит на отрезке OB (рис.155). Следовательно, по свойству внешнего угла треугольника $\angle AD'O > \angle ABO$, $\angle CD'O > \angle CBO$. Но тогда $\angle D = \angle AD'C > \angle B$ – противоречие. Таким образом, $OB = OD$, т.е. диагональ AC является осью симметрии четырехугольника. Значит, биссектрисы углов B и D пересекают AC в одной и той же точке, которая равноудалена от всех сторон четырехугольника.

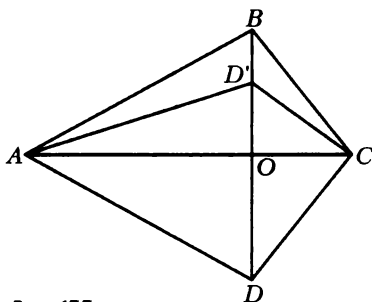


Рис. 155

4. Так как треугольники CAA' , CBV' – равнобедренные, $\angle CAA' = \angle C_0CA$, $\angle CBV' = \angle C_0CB$. Следовательно, расстояния от точки C до прямых AC_1 и BC_1 равны соответственно расстояниям от A и B до прямой CC_0 . Но CC_0 – медиана, так

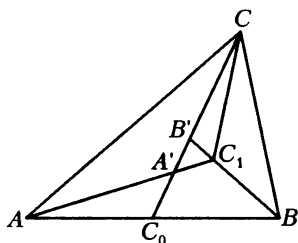


Рис. 156

что эти расстояния равны. Таким образом, точка C равноудалена от прямых C_1A и C_1B , т.е. $\angle CC_1A = \angle CC_1B$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \angle C_1CA - \angle C_1CB &= \\ = \angle C_1BC - \angle C_1AC &= \angle C_0CB - \angle C_0CA \end{aligned}$$

(рис. 156). Это, очевидно, равно-

сильно утверждению задачи.

5. Нет. Пусть стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны медианам треугольника ABC . Тогда стороны ABC параллельны медианам $A'B'C'$ и, значит, углы между медианами и высотами в обоих треугольниках одни и те же. При этом в общем случае треугольники не подобны.

6. Тупоугольных. Зафиксируем две вершины A и B треугольника. Если они являются противоположными вершинами 2008-угольника, то при любой третьей вершине C треугольник ABC – прямоугольный. В противном случае пусть A', B' – вершины 2008-угольника, противоположные A, B . Треугольник ABC будет остроугольным тогда и только тогда, когда C находится на меньшей из двух ограниченных точками A', B' дуг описанной около 2008-угольника окружности. Следовательно, при любых фиксированных A, B среди треугольников, имеющих эти две вершины, остроугольных не больше, чем тупоугольных, а для некоторых пар вершин строго меньше. Значит, и всего тупоугольных треугольников больше.

7. $1/3$. Пусть X, Y – точки, делящие отрезок AC на три равные части ($AX = XY = YC$); U, V – точки пересечения прямых BX, BY с дугой AC ; Z – точка пересечения прямых BC и UV (рис.157). Тогда, так как $UV \parallel AC$, то $VZ = UV = VC$.

Следовательно, $\angle U CZ = 90^\circ$. С другой стороны, по теореме о вписанном угле $\angle ACU = \angle UCV = \beta/6$, а $\angle BCA = 90^\circ - \alpha/2$. Из этих равенств вытекает, что $\beta = 3\alpha$.

8. Да. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, образованный центрами окружностей, X – вершина исходного четырехугольника, лежащая на стороне AB . Так как его стороны являются биссектрисами внешних углов

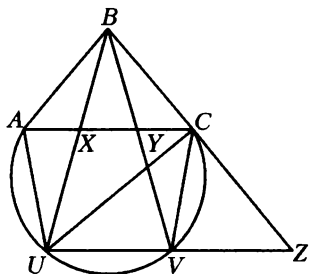


Рис. 157

исходного четырехугольника, бильярдный шар, выпущенный из X вдоль стороны исходного четырехугольника, отражаясь от сторон $ABCD$, будет все время двигаться по сторонам. «Выпрямим» траекторию шара, построив четырехугольники: A_1BCD_1 , симметричный $ABCD$ относительно BC , $A_2B_1CD_1$, симметричный A_1BCD_1 относительно CD_1 , и $A_2B_2C_1D_1$, симметричный $A_2B_1CD_1$ относительно D_1A_2 . Тогда траектория перейдет в отрезок XX' , где X' – точка на A_2B_2 , такая что $A_2X' = AX$ (рис.158). При этом $\angle X'XB = \angle XX'A_2$, т.е. $A_2B_2 \parallel AB$. Следовательно, взяв вместо X другую точку отрезка AB , соединив ее с соответствующей точкой отрезка A_2B_2 и произведя обратные отражения частей полученного отрезка, мы получим новый четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи. Таким образом, существует бесконечное множество четырехугольников, для которых A, B, C, D – центры вневписанных окружностей. Однако периметры всех этих четырехугольников равны длине отрезка $XX' = AA_2$, не зависящей от выбора точки X .

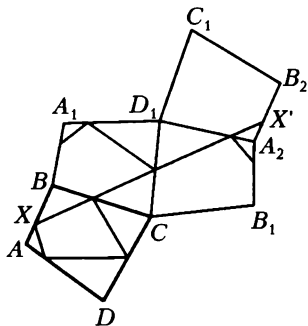


Рис. 158

9 класс

1. Нет. Например, из трапеций, основания которых равны 1 и 2, а боковые стороны – 1 и $\sqrt{2}$, можно, продолжая конструкцию, изображенную на рисунке 159, составить несимметричный шестиугольник.

2. Если четырехугольник – трапеция, то прямая, соединяющая проекции точки на боковые стороны, должна быть параллельна основаниям. Очевидно, что геометрическое место таких точек – прямая, проходящая через точку пересечения боковых сторон без самой этой точки. Также ясно, что для прямоугольника иско-мое ГМТ – вся плоскость, а для параллелограмма, отличного от прямоугольника, таких точек не существует.

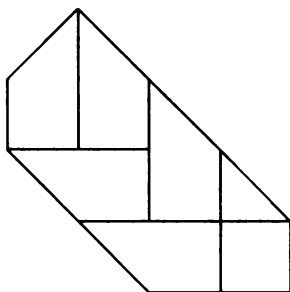


Рис. 159

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке X , BC и DA – в точке Y . Обозначим проекции произвольной точки P на

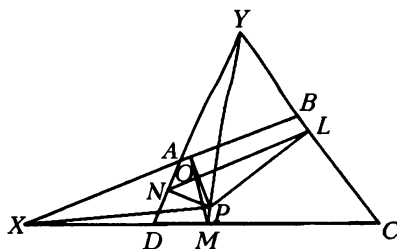


Рис. 160

прямые AB , BC , CD , DA через K , L , M , N , а точку пересечения KM и LN через O (рис.160). Так как четырехугольники $YLPN$ и $XKPM$ – вписанные, получаем, что $\angle PLN = \angle PYA$ и $\angle PMK = \angle PXA$. Следовательно,

$$\angle MOL = \pi - \angle C - \angle PLN - \angle PMK = \pi - \angle C - (\angle A - \angle XPY).$$

Поэтому условие $\angle MOL = \pi/2$ равносильно условию $\angle XPY = \angle A + \angle C - \pi/2$. Значит, искомое ГМТ – окружность, проходящая через точки X и Y без самих этих точек.

3. Пусть R и S – радиус описанной окружности и площадь треугольника ABC . Используя теорему синусов и формулы $S = pr = abc/4R$, преобразуем правую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p}{r}} &= \frac{p}{\sqrt{S}} = \frac{R(\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C)}{\sqrt{2R^2 \sin \angle A \sin \angle B \sin \angle C}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin \angle A}{2 \sin \angle B \sin \angle C}} + \sqrt{\frac{\sin \angle B}{2 \sin \angle C \sin \angle A}} + \sqrt{\frac{\sin \angle C}{2 \sin \angle A \sin \angle B}}. \end{aligned}$$

Из неравенства о средних следует, что

$$\frac{2}{\sqrt{\sin \angle A}} \leq \sqrt{\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C \sin \angle A}} + \sqrt{\frac{\sin \angle C}{\sin \angle A \sin \angle B}}.$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получим утверждение задачи.

4. Первое решение. Из решения задачи 4 для 8 класса следует, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке L , а точка C_1 лежит на окружности, проходящей через A , B и центр O описанной около ABC окружности. Поэтому

$$\begin{aligned} \angle OC_1L &= \angle AC_1C - \angle AC_1O = \angle AC_1C - \angle ABO = \\ &= (\pi - \angle C) - (\pi/2 - \angle C) = \pi/2, \end{aligned}$$

т.е. C_1 лежит на окружности с диаметром OL . Аналогично получаем, что A_1 и B_1 тоже лежат на этой окружности.

Второе решение. Рассмотрим точку C_2 , изогонально сопряженную C_1 . Из условия следует, что $\angle C_2AB = \angle C_2CA$ и $\angle C_2CB = \angle C_2BA$. Значит, окружности C_2AC и C_2BC касаются

прямой AB в точках A и B . Поэтому радикальная ось этих окружностей – прямая CC_2 – проходит через середину AB , т.е. C_2 лежит на медиане треугольника ABC . Соответственно C_1 лежит на симедиане, а прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке Лемуана L .

Как известно, симедиана CL проходит через точку C' пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC , проведенных в точках A и B . Очевидно, что точки A , B лежат на окружности с диаметром OC' . Как показано в первом решении, C_1 лежит на этой же окружности. Следовательно, $\angle OC_1L = \pi/2$ и C_1 лежит на окружности с диаметром OL .

5. Да, например, склеив тетраэдр из развертки, изображенной на рисунке 161, и разрезав его поверхность по жирным линиям, получим два равных правильных шестиугольника (темный и светлый).

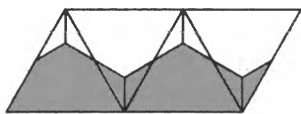


Рис. 161

6. Пусть C_1 , C_2 – основания биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C треугольника ABC , а M – его центр тяжести. Очевидно, вершина C лежит на перпендикуляре, восставленном из C_2 к прямой C_1C_2 . Кроме того, проекция M на этот перпендикуляр делит высоту треугольника в отношении $2 : 1$, что позволяет сразу построить точку C и середину C_0 стороны AB .

Пусть C' – точка пересечения прямой CC_1 и перпендикуляра l к прямой C_1C_2 , проведенного из C_0 . Точка C' лежит на описанной окружности треугольника ABC (рис.162), следовательно, серединный перпендикуляр к CC' пересекает l в центре O этой окружности. Построив окружность, мы найдем вершины A , B как точки ее пересечения с прямой C_1C_2 .

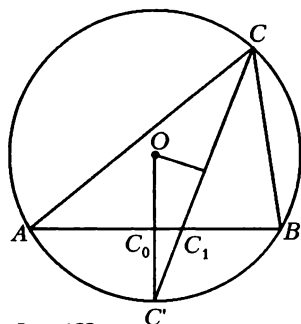


Рис. 162

7. Р.

Первое решение. Докажем, что точка Z лежит на окружности ABH , радиус которой равен R . Пусть H' – вторая точка пересечения окружностей XHY и ABH , C' – ортоцентр треугольника ABH' (рис.163). Тогда C' лежит на окружности, симметричной ABH относительно AB , т.е. на окружности ABC . Поэтому $CH = C'H' = 2R|\cos \angle C|$ и $CNH'C'$ – параллелограмм. Так как CC' и HH' – хорды равных окружностей ABC и XHY ,

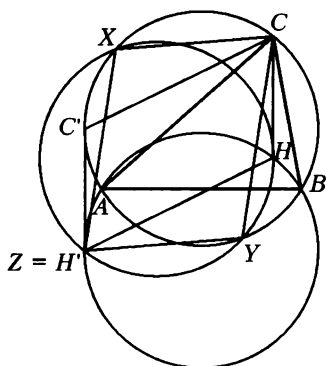


Рис. 163

они симметричны относительно центра симметрии этих окружностей – середины XU . Следовательно, $XCYN'$ – параллелограмм, и H' совпадает с Z .

Второе решение. Точка Z получается из C отражением относительно середины T отрезка XU . Пусть H' – отражение H относительно T . Тогда $\overline{CH} = \overline{H'Z}$. Заметим, что при сдвиге на \overline{CH} окружность ABC переходит в окружность ABH (достаточно представить этот сдвиг как композицию

симметрий относительно диаметра, параллельного AB , и относительно AB). Значит, точка H' при этом сдвиге переходит в точку Z , лежащую на окружности ABH , радиус которой равен R .

Третье решение (А.Ефимов). Пусть O, O_1 – центры описанной окружности треугольника ABC и окружности, проходящей через H . Тогда O_1 лежит на окружности с центром H и радиусом R . Значит, середина отрезка OO_1 лежит на окружности с центром в середине отрезка OH и радиусом $R/2$, т.е. окружности девяти точек треугольника ABC . Поскольку середины отрезков OO_1, XU и CZ совпадают, точка Z лежит на окружности – образе окружности девяти точек при гомотетии с центром C и коэффициентом 2, т.е. окружности радиуса R , проходящей через A и B .

8. Пусть X, Y – точки пересечения ω и l . Рассмотрим центральную проекцию из ω на l с центром C , получаем равенство двойных отношений: $(AB; XY) = (B'A'; XY)$. Далее, так как $\angle A'PA - \angle B'PB - \angle XPY = \pi/2$, получаем, что $(A'B; XY) = (A'B'; YX)$. Следовательно, $(AB; XY) = (A'B'; YX)$, т.е. точка пересечения прямых AA'' и BB'' лежит на ω . Через эту же точку проходит и прямая CC'' .

10 класс

1. При $n = 3$. Предположим, что $n \neq 3$. Если $n > 4$, то граница хотя бы одного из полученных при разрезании многоугольников содержит отрезки, по крайней мере, трех сторон исходного многоугольника, и значит, вписанные в эти многоугольники окружности совпадают. Это утверждение остается верным и при $n = 4$, так как многоугольники, на которые разрезан исходный, имеют разное число сторон и, следовательно-

но, разрезающая прямая не является диагональю четырехугольника.

Таким образом, разрезающая прямая касается окружности, вписанной в исходный n -угольник, и отсекает от него треугольник. Вершинами оставшейся части являются $n - 1$ вершина исходного многоугольника и две точки, лежащие на его сторонах. Поскольку $n - 1 \geq 3$, эти вершины определяют единственную окружность, которая проходит через оставшуюся вершину многоугольника и, значит, не проходит через внутренние точки его сторон. Следовательно, оставшаяся часть не вписана в окружность — противоречие.

Примечание. Очевидно, что для любого треугольника можно провести касательную к вписанной в него окружности, разрезающую его на треугольник и вписанный четырехугольник.

2. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, O — центр описанной, M — центр тяжести, I_0 — центр окружности, вписанной в серединный треугольник. Очевидно, что ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ симметричен H относительно I_0 . С другой стороны, для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, I является ортоцентром, ABC — ортотреугольником, а значит, описанная около ABC окружность — окружностью девяти точек. Следовательно, центр описанной окружности треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, симметричен I относительно O . Рассмотрим треугольник IHN_1 . Его медиана II_0 проходит через M и делится этой точкой в отношении 2 : 1. Значит, M — центр тяжести этого треугольника. Но M также делит в отношении 2 : 1 отрезок HO . Следовательно, O — середина отрезка IN_1 (рис. 164).

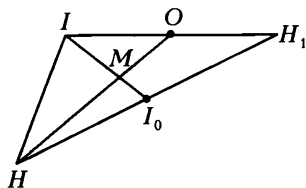


Рис. 164

3. Точка P является центром гомотетии окружностей ω и ω_1 . Следовательно, $AD \parallel MN$, т.е. отрезок AD перпендикулярен линии центров окружностей ω_1 и ω_2 , а точки A и D симметричны относительно этой линии.

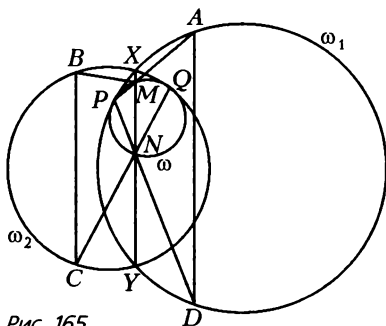


Рис. 165

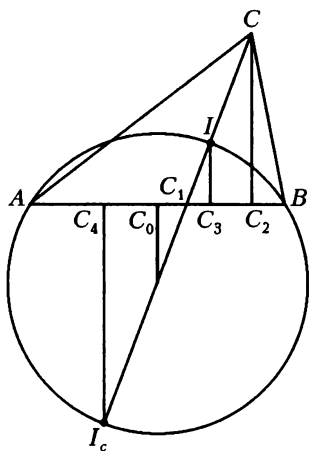


Рис. 166

ются равенства:

$$\frac{C_2C_3}{C_2C_4} = \frac{CI}{CI_c} = \frac{r}{r_c} = \frac{C_1I}{C_1I_c} = \frac{C_1C_3}{C_1C_4}.$$

Из этих равенств следует, что точка C_3 совпадает с определенной выше точкой C' . Возьмем теперь любую точку I , проекция которой на l совпадает с C_3 . Прямая C_1I пересекает перпендикуляры к l , восстановленные из C_2 и C_0 , в точке C и центре описанной окружности треугольника IAB . Проведя эту окружность и найдя точки ее пересечения с l , мы получим искомый треугольник.

5. $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. Пусть X, Y – точки, в которых плоскость сечения

пересекает стороны CD и DA основания $ABCD$ пирамиды. Тогда

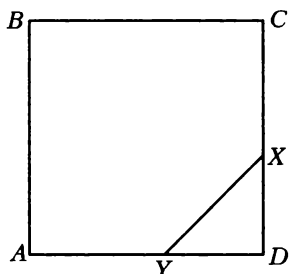


Рис. 167

пятиугольник $ABCXY$ является центральной проекцией правильного пятиугольника. Следовательно, двойное отношение A, Y, D и бесконечно удаленной точки прямой AD равно двойному отношению четырех точек, в которых четыре прямые, содержащие стороны правильного пятиугольника, пересекают пятую (рис.167), т.е.:

$$\frac{DY}{AD} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Точка X делит отрезок CD в таком же отношении, следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{XY}{AB} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Примечание. Так как отношение стороны пятиугольника к стороне основания определяется однозначно, отношение стороны основания к боковой стороне пирамиды также определяется однозначно. С другой стороны, известно, что плоскости 8 граней правильного икосаэдра ограничивают правильный октаэдр. Поэтому пирамида, удовлетворяющая условиям задачи, является половиной октаэдра, т.е. ее боковое ребро равно стороне основания.

6. Пусть произведение сторон $AC = b$ и $BC = a$ треугольника ABC равно $8Rr$. Так как площадь треугольника $S = pr = abc/4R$, где p — полупериметр, получаем, что $4prR = abc = 8Rrc$, т.е. $p = 2c$ или $a + b = 3c$. Поскольку $b < a + c$, отсюда следует, что $2a > 2c$ и $c < a$. Аналогично $c < b$. Таким образом, C как строго наименьший угол треугольника меньше 60° .

7. Пусть окружность, построенная на AA' , пересекает AC в точке X , а окружность, построенная на BB' , пересекает BC в точке Y (рис.168).

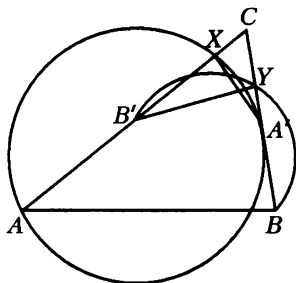


Рис. 168

Так как $\angle AXA' = \angle BYB'$, треугольники CXA' и CYB' подобны, т.е. $CX/CA' = CY/CB'$. Тогда

$$CX \cdot CA = 2CX \cdot CB' = 2CY \cdot CA' = CY \cdot CB.$$

Следовательно, степени точки C относительно обеих окружностей равны, т.е. C лежит на их радикальной оси.

8. Назовем 1-близкими точки, расстояние между которыми не превосходит 1.

Если диаметр данного множества V не превосходит $\sqrt{3}$, то V можно покрыть кругом радиуса 1. Этот круг можно выбрать так, что на его границе будут лежать точки из V . Обозначим центр этого круга через X , а точку на границе через Y .

Заметим, что точки множества $V \setminus B(Y, 1)$ попарно 1-близки, а значит, диаметр этого множества не превосходит 1. Кроме того, отрезок $[X, Y]$ разбивает множество $V \cap B(Y, 1)$ на две части, диаметр каждой из которых не превосходит 1. Так мы получаем нужное нам разбиение.

Если же найдутся такие две точки $X, Y \in V$, что

$d(X, Y) > \sqrt{3}d$, тогда легко понять, что множества $V \setminus B(X, 1)$, $V \setminus B(Y, 1)$ и $V \cap B(X, 1) \cap B(Y, 1)$ в объединении дают все V , и диаметр каждой из этих частей не превосходит 1. Действительно, точки каждого из множеств $V \setminus B(X, 1)$ и $V \setminus B(Y, 1)$ попарно 1-близки. А множество $V \cap B(X, 1) \cap B(Y, 1)$ целиком лежит внутри $B(X, 1) \cap B(Y, 1)$, диаметр которого не больше 1 (и достигается на отрезке, соединяющем точки пересечения окружностей $S(X, 1)$ и $S(Y, 1)$).

ПЯТАЯ ОЛИМПИАДА (2009)

Заочный тур

1. Пусть отрезки B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке D (рис.169). Тогда по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle B_1OB_2 = \angle AB_1O - \angle AB_2O = (\angle AB_1C_1 - \angle AB_2C_2)/2 = \angle B_1DB_2/2.$$

Аналогично $\angle C_1OC_2 = \angle C_1DC_2/2$, т.е. эти углы равны.

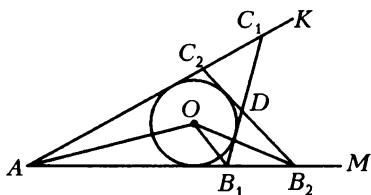


Рис. 169

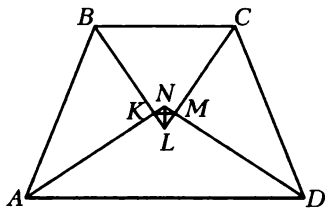


Рис. 170

2. Да. Предположим, например, что отрезки AA' и BB' равны. Тогда из равенства периметров треугольников $AA'B$ и $AA'C$ следует, что $BA' = (AB + BC + CA)/2 - AB$. Аналогично, $AB' = (AB + BC + CA)/2$, и значит, треугольники ABA' и BAB' равны по трем сторонам. Но тогда $\angle A = \angle B$, что противоречит неравнобедренности треугольника ABC .

3. Пусть $KLMN$ – четырехугольник, образованный биссектрисами (рис.170). Так как AK и BK – биссектрисы смежных углов трапеции, то $\angle LKN = 90^\circ$. Аналогично, $\angle LMN = 90^\circ$. Следовательно, $LK^2 + KN^2 = LM^2 + MN^2$. С другой стороны, из перпендикулярности диагоналей получаем, что $KL^2 + MN^2 = KN^2 + LM^2$. Из этих двух равенств следует, что $KL = LM$ и $MN = NK$, а значит, $\angle NKM = \angle NML$. Но точки K , M , как точки пересечения биссектрис смежных углов, равноудалены от оснований трапеции, т.е. $KM \parallel AD$. Поэтому $\angle CAD = \angle BDA$, и трапеция равнобокая.

4. При отражении лучей от окружностей выполняются условия $QA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$ и $QB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$. Значит, $\angle(PQ, PA_1) = \angle(PA_1, PA_2) = \angle(PA_2, PA_3) = \dots$ и $\angle(PQ, PB_1) = \angle(PB_1, PB_2) = \angle(PB_2, PB_3) = \dots$ (углы ориентированные). Кроме того, так как точки A_1, B_1, P лежат на одной прямой, то $\angle(PQ, PA_1) = \angle(PQ, PB_1)$. Следовательно, при любом i имеем $\angle(PA_{i-1}, PA_i) = \angle(PB_{i-1}, PB_i)$, откуда по индукции получаем, что точки A_i, B_i, P лежат на одной прямой.

5. Из условия задачи следует, что $\angle BOC = \angle BO_1C = \angle A$. С другой стороны,

$$\angle BOC = 180^\circ - (180^\circ - \angle B)/2 - (180^\circ - \angle C)/2 = (180^\circ - \angle A)/2.$$

Отсюда получаем, что $\angle A = 60^\circ$.

6. Пусть ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой AB , I_a, I_b, I_c – центры его вневписанных окружностей (рис.171). Тогда

$$\begin{aligned}\angle AI_cB &= 180^\circ - (180^\circ - \angle BAC)/2 - (180^\circ - \angle ABC)/2 = \\ &= (\angle BAC + \angle ABC)/2 = 45^\circ, \\ \angle AI_aB &= 180^\circ - \angle BAC/2 - \angle ABC - (180^\circ - \angle ABC)/2 = \\ &= 90^\circ(\angle BAC + \angle ABC)/2 = 45^\circ\end{aligned}$$

и, аналогично, $\angle BI_bA = 45^\circ$, причем точки I_a, I_b лежат по одну сторону от прямой AB , а I_c по другую. Следовательно, все эти три точки лежат на двух окружностях c_1, c_2 , проходящих через точки A, B , в которых хорда AB стягивает дугу в 90° .

Пусть прямые k, l проходят соответственно через A, B перпендикулярно AB . Когда точка C описывает полуокружность с диаметром AB , каждый из центров пробегает четверть соответствующей окружности. А именно, I_a пробегает дугу между B и точкой пересечения окружности с l ; I_b – дугу между A и точкой пересечения окружности с k ; I_c – дугу между точками пересечения окружности с k и l . Когда C описывает всю окружность с диаметром AB , исключая точки A, B , центры пробегают искомое ГМТ, а именно дуги окружностей c_1, c_2 , которые лежат вне окружности с

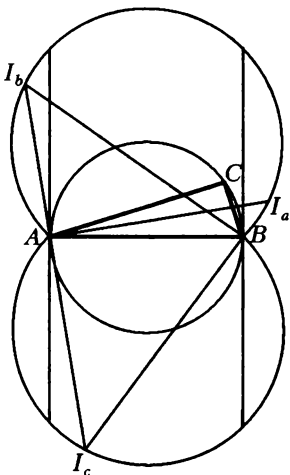


Рис. 171

А это значит, что он будет присоединенным по крайней мере трижды, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что для заданных точек существует k единичных треугольников. Поскольку для каждой из n точек существует максимум два присоединенных треугольника, то $2n$ — это наибольшее количество всех возможных присоединений. Так как каждый единичный треугольник будет присоединенным по крайней мере трижды, то $3k$ — это наименьшее количество из всех возможных присоединений. Таким образом, $3k \leq 2n$, т.е. $k \leq \frac{2}{3}n$.

б) Рассмотрим ромб, который состоит из двух правильных треугольников, и будем поворачивать его на очень «маленькие» углы вокруг одной из его тупых вершин так, что в результате получим m ромбов.

Если все углы поворота меньше $\pi/3$, то все вершины наших ромбов будут вершинами выпуклого многоугольника. При этом $n = 3m + 1$, $k = 2m$, и, если m достаточно велико, $k > 0,666n$.

10. Пусть D — точка пересечения OC_1 с перпендикуляром из C на AB (рис. 175). Так как D лежит на описанной окружности треугольника AOB и $AO = OB$, то $\angle ADC_1 = \angle BDC_1$. Значит, $AD/BD = AC_1/BC_1 = AC$. С другой стороны, так как $CD \perp AB$, то $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Из этих равенств следует, что $AC = AD$, т.е. D симметрична C относительно AB . Но тогда CC_1 пересекает серединный перпендикуляр к AB в точке, симметричной O . Поскольку точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра лежит на описанной окружности, получаем, что хорда AB делит перпендикулярный ей радиус пополам. Следовательно, опирающийся на эту дугу $\angle C = 60^\circ$.

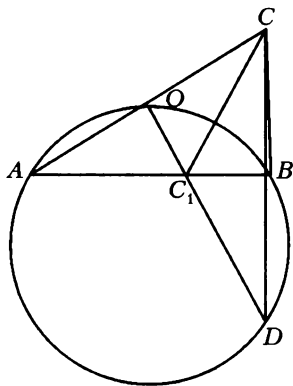


Рис. 175

11. Из условия следует, что $\angle BAC + \angle BCD = \angle ACD + \angle BAD = 180^\circ$. Значит, $\angle BCA = \angle CAD$, т.е. $AD \parallel BC$ и отрезок, соединяющий середины AB и CD , является средней линией трапеции и равен $(AD + BC)/2$. Кроме того, так как $\angle ACD = \angle ABC$ и $\angle BAC = \angle CDA$, то треугольники ABC и DCA подобны. Следовательно, $AC^2 = AD \cdot BC$ и утверждение задачи вытекает из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

12. Из условия следует, что $CB_1/CA = CB/CA = BL/LA = B_2L/AL$, т.е. $B_1B_2 \parallel CL$ (рис.176). Аналогично $A_1A_2 \parallel CL$. Значит, $\angle AB_1B_2 = \angle BA_1A_2 = \angle C/2$. При симметрии относительно CL точки B и A_1 перейдут в B_1 и A , а точка A_2 – в некоторую точку A' . При этом $\angle A'AB_2 + \angle A'B_1B_2 = \angle A + \angle B + 2\angle C/2 = 180^\circ$. Следовательно, четырехугольник $AA'B_1B_2$ вписанный и точки O_1, O_2 симметричны относительно CL .

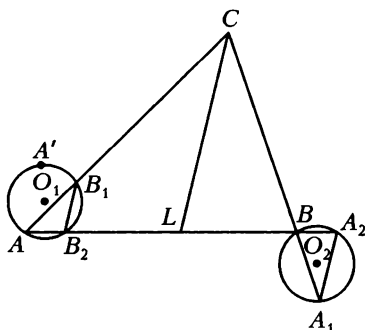


Рис. 176

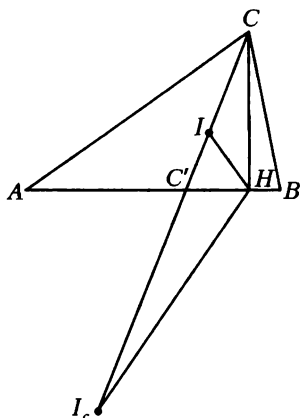


Рис. 177

13. Центры вписанной и внеписанной окружностей I и I_c лежат на биссектрисе угла C . Пусть C' – точка пересечения этой биссектрисы со стороной AB (рис.177). Тогда $CI/CI_c = r/r_c = C'I/C'I_c$, где r, r_c – радиусы вписанной и внеписанной окружностей. Поэтому для любой точки X окружности с диаметром CC' отношение XI/XI_c будет одним и тем же. Так как основание H высоты, опущенной на AB , лежит на этой окружности, $HI/HI_c = CI/CI_c = C'I/C'I_c$, т.е. HC' и HC – внутренняя и внешняя биссектрисы угла HII_c . Следовательно, проведя эти биссектрисы, мы восстановим точку C и прямую AB . Поскольку $\angle IAI_c = \angle IBI_c = 90^\circ$, точки A, B лежат на окружности с диаметром II_c . Соответственно, построив эту окружность и найдя точки ее пересечения с прямой AB , мы восстановим треугольник.

14. Первое решение. Проведем через точку B прямую, параллельную AC , до пересечения с биссектрисой угла C в точке N (рис.178). Так как $\angle BNC = \angle ACN = \angle BCN$, то треугольник BCN равнобедренный и BM – его медиана. Следовательно,

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ANC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2}.$$

Второе решение. Так как $S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot CM \sin \frac{\angle C}{2}$ и $CM = BC \cos \frac{\angle C}{2}$, то $S_{AMC} = \frac{1}{4} AC \cdot BC$.

15. Пусть C – данная точка, A, B – точки на окружности (рис.179). Если касательная к окружности в точке A не параллельна CB , то, переместив точку A , можно увеличить расстояние

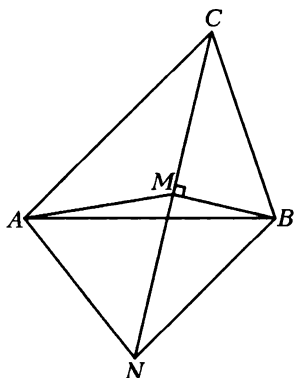


Рис. 178

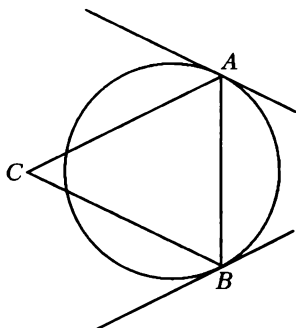


Рис. 179

от нее до BC , а значит, и площадь треугольника. Аналогично, касательная в точке B параллельна CA . Следовательно, прямые AC и BC симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB , т.е. $AC = BC$.

Отметим, что проведенное рассуждение не зависит от того, лежит ли данная точка внутри или вне окружности.

16. Пусть C_3 – точка пересечения прямых OC_1 и A_2B_1 (рис.180). Применив сначала к треугольнику OA_2B_1 и точке C_1 теорему Чевы, а затем к этому же треугольнику и прямой A_1B_2

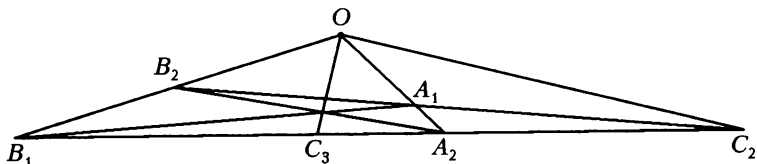


Рис. 180

теорему Менелая, получаем, что $C_2A_2/C_2B_1 = C_3A_2/C_3B_1 = OA_2/OB_1$. Следовательно, OC_2 – внешняя биссектриса угла A_2OB_1 и $OC_2 \perp OC_1$.

17. Пусть прямая XY проходит через центр O описанной окружности. Зафиксируем точку Y и будем двигать точку X по

прямой. При этом перпендикуляры из A_1, B_1, C_1 на стороны $A_2B_2C_2$ перемещаются равномерно и параллельно себе и, значит, точки их пересечения движутся по прямым. Когда точка X совпадает с O или Y , три перпендикуляра пересекаются в одной точке, следовательно, это выполняется для любого положения точки X .

Из предыдущего рассуждения следует, что для фиксированной точки Y множество точек X , для которых перпендикуляры пересекаются в одной точке, это либо прямая OY , либо вся плоскость. Предположим, что имеет место второй случай, и возьмем в качестве X точку C . Тогда точки A_1, B_1 совпадают с C , а C_1 с основанием высоты треугольника ABC , проведенной из C . Так как три перпендикуляра пересекаются в одной точке, $A_2B_2 \parallel AB$, т.е. Y лежит на прямой OC . Взяв теперь в качестве X другую вершину треугольника, получим, что Y совпадает с O .

18. Полоса, края которой не входят в ГМ, параллельны данным прямым и находятся посередине между средней прямой и крайними.

Если произвольный треугольник с вершинами на данных прямых перенести параллельно этим прямым, центр его вписанной окружности подвергнется такому же переносу. Следовательно, искомое ГМТ является полосой с краями, параллельным исходным прямым.

Пусть a, c – крайние из исходных прямых, b – средняя, и на них соответственно находятся вершины треугольника A, C, B .

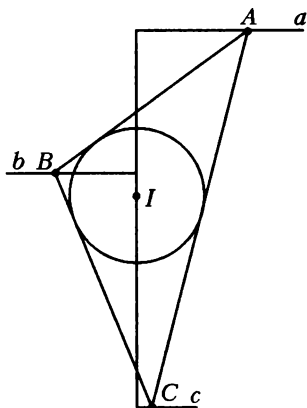


Рис. 181

Проведем диаметр вписанной окружности, перпендикулярный этим прямым, и рассмотрим его конец, ближайший к прямой a (рис.181). Он лежит ближе к a , чем точка касания вписанной окружности со стороной AB , и, значит, ближе к a , чем прямая b . Так как другой конец диаметра находится ближе к a , чем прямая c , то середина диаметра лежит ближе к a , чем прямая, средняя между b и c . Поменяв в рассуждении местами a и c , получаем, что центр вписанной окружности I располагается в полосе, указанной в ответе.

Возьмем теперь произвольный треугольник ABC с вершинами на соответствующих прямых. Переместим вершину B так,

чтобы сторона AB стала перпендикулярна исходным прямым. Теперь устремим точку C в бесконечность. Углы при вершинах A и B стремятся к прямым, а точка пересечения их биссектрис, т.е. I , стремится к вершине равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой AB . Значит, I неограниченно приближается к прямой посередине между a и b . Аналогично, начав с того же треугольника, можно устремить I к прямой посередине между b и c . Следовательно, возможные положения I заполняют всю полосу, указанную в ответе.

19. Наименьшее значение равно 3, наибольшее равно $n - 1$, если n четно, и n , если n нечетно.

Так как отрезки $A_i P_i$ делят площадь многоугольника пополам, любые два из них пересекаются. Пусть точка P_i лежит на стороне $A_j A_{j+1}$. Тогда точки P_j и P_{j+1} лежат по разные стороны от A_i , т.е. всегда найдутся три точки, лежащие на разных сторонах. С другой стороны, если две вершины многоугольника являются вершинами правильного треугольника, а все остальные расположены вблизи его третьей вершины, то все точки P_i лежат на трех сторонах многоугольника.

Очевидно, для правильного n -угольника при нечетном n все P_i лежат на разных сторонах. Пусть $n = 2m$. Так как отрезки $A_m P_m$ и $A_{2m} P_{2m}$ пересекаются, точки P_m и P_{2m} лежат по одну сторону от диагонали $A_m A_{2m}$. По другую сторону от этой диагонали лежат m сторон многоугольника, и точка P_i может попасть на эти стороны, только если соответствующая вершина A_i лежит между P_m и P_{2m} . Но таких вершин не больше, чем $m - 1$, значит, существует сторона, на которой нет точек P_i .

Рассмотрим теперь n -угольник, вершины A_1, \dots, A_{n-2} которого являются вершинами правильного $(n - 1)$ -угольника, а вершины A_{n-1}, A_n расположены вблизи оставшейся вершины этого $(n - 1)$ -угольника. Точки P_i расположены на всех сторонах построенного многоугольника, кроме $A_{n-1} A_n$.

20. Так как $CA_1/CA = CB_1/CB = \cos \angle C$, треугольники ABC и $A_1 B_1 C$ подобны. Значит, поскольку $\angle ACO = \angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B$, прямая CO содержит высоту треугольника $A_1 B_1 C$, т.е. точки C, O, C_2 лежат на одной прямой (рис.182). Кроме того, из подобия треугольников ABC и $A_1 B_1 C$ вытекает, что $CC_2/CC_1 = 2 \cos \angle C$. С другой сто-

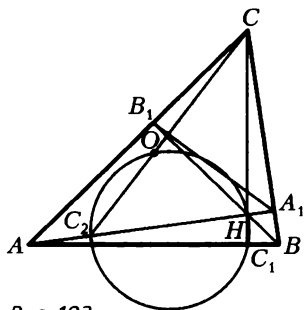


Рис. 182

роны, известно, что $CH = 2CO \cos \angle C$. Следовательно, $CO \cdot CC_2 = CH \cdot CC_1$, что равносильно утверждению задачи.

21. Аффинным преобразованием переведем параллелограмм в квадрат и рассмотрим систему координат, оси которой совпадают с диагоналями квадрата. Будем считать, что стороны четырехугольника пересекают оси координат в точках $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$, а точки P, Q имеют координаты $(p; 0)$ и $(0; q)$ соответственно. Тогда стороны четырехугольника лежат на прямых с уравнениями $\frac{x}{p} \pm y = 1$, $\pm x + \frac{y}{q} = 1$; вершины имеют координаты

$$\left(\frac{p(q-1)}{pq-1}; \frac{q(p-1)}{pq-1} \right), \left(-\frac{p(q-1)}{pq+1}; \frac{q(p+1)}{pq+1} \right),$$

$$\left(-\frac{p(q+1)}{pq-1}; -\frac{q(p+1)}{pq-1} \right), \left(\frac{p(q+1)}{pq+1}; -\frac{q(p-1)}{pq+1} \right),$$

и нетрудно видеть, что прямая, соединяющая середины диагоналей, проходит через начало координат.

22. Если радиусы описанной и вписанной окружностей четырехугольника равны R и r , а расстояние между их центрами O и I равно d , то $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$. Значит, по данным R, r мы можем определить d и построить эти окружности. Диагонали всех четырехугольников с данными описанной и вписанной окружностями пересекаются в одной и той же точке L , лежащей на прямой OI , а их середины лежат на окружности с диаметром OL . Кроме того, отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку I , а его длина равна $OL \sin \varphi$, где φ — данный угол. Построив проходящую через I хорду такой длины, найдем середины диагоналей, а затем и вершины четырехугольника.

23. Да. Применим к правильному $2n$ -угольнику $A_1 \dots A_{2n}$ растяжение относительно диагонали $A_n A_{2n}$ с коэффициентом $k > 1$ (рис.183). Теперь перегнем полученный многоугольник по прямой $A_n A_{2n}$, так чтобы его вершины $B_1, \dots, B_{n-1}, B_{n+1}, \dots, B_{2n-1}$ проецировались в вершины исходного правильного многоугольника. Тогда все прямые $B_i B_{2n-i}$ будут параллельны и многогранник, ограниченный треугольниками $B_{n-1} B_n B_{n+1}$, $B_{2n-1} B_n B_1$,

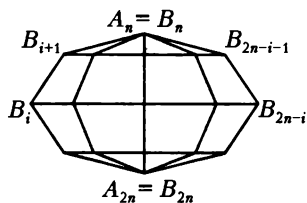


Рис. 183

трапециями $B_i B_{i+1} B_{2n-i-1} B_{2n-i}$ и двумя половинами $2n$ -угольника, будет искомым.

24. Пусть $ABCD$ – основание пирамиды, P – точка касания основания с вписанной сферой, P' – точка касания основания с внеписанной сферой, касающейся основания и продолжения боковых граней. Тогда расстояния от P до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих ребрах, а расстояния от P' – как их тангенсы. Отсюда следует, что прямые, соединяющие каждую вершину основания с P и P' , симметричны относительно биссектрисы соответствующего угла основания.

Пусть теперь K, L, M, N – точки, симметричные P относительно AB, BC, CD, DA . Так как, например, $BK = BP = BL$, серединный перпендикуляр к KL совпадает с биссектрисой угла KBL , т.е. прямой BP' (рис. 184). Значит, P' – центр окружности, проходящей через точки K, L, M, N . Применив гомотегию с центром P и коэффициентом $1/2$, получаем, что середина отрезка PP' – центр окружности, проходящей через проекции P на ребра основания.

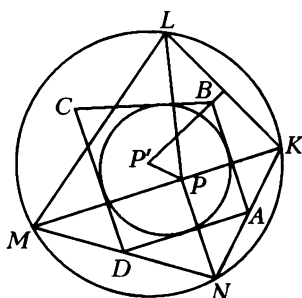


Рис. 184

Финальный тур

8 класс

1. Первое решение. Из условия следует, что $\angle BMC = \angle ACD = \angle CDA = \angle BCM$ (первое и третье равенство следуют из параллельности прямых BM и AC , BC и AD ; второе из равенства $AC = AD$). Значит, $BM = BC = AB$, и $\angle BAM = \angle BMA = \angle MAC$ (рис. 185).

Второе решение. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку P , а на продолжении диагонали AC (за точку C) – точку K . Тогда $\angle MCK = \angle ACD = \angle ADC = \angle BCM$, т.е. CM – биссектриса угла BCK . Так как AC – биссектриса угла BAD и $BM \parallel AC$, то BM – биссектриса угла PBC . Таким образом, M – точка пересечения биссектрис двух внешних уг-

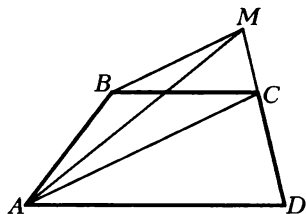


Рис. 185

лов треугольника ABC , следовательно, AM – биссектриса угла BAC .

2. Пусть части, прилегающие к вершинам A, B, C вписанного четырехугольника $ABCD$, – вписанные четырехугольники. Так как углы A и C четырехугольника противолежат равным углам в точке разреза L , то они равны, а значит, $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Поэтому прямые, разрезающие четырехугольник, перпендикулярны. Но тогда угол B тоже прямой, т.е. $ABCD$ – прямоугольник, а четвертая часть тоже является вписанным четырехугольником. Кроме того, углы, опирающиеся на хорды AL, BL, CL , равны, а так как радиусы этих окружностей тоже равны, то равны и сами хорды. Следовательно, L – центр прямоугольника, и четвертая окружность имеет тот же радиус.

3. Пусть CH_c – третья высота треугольника. Тогда $\angle H_a H_c B = \angle H_b H_c A = \angle C$, так как четырехугольники $CBH_c H_b$ и $CAH_c H_a$ вписаны в окружности с диаметрами BC и AC . Следовательно, точка, симметричная H_a относительно AB , лежит на прямой $H_b H_c$. Аналогично, на этой же прямой лежит точка, симметричная H_a относительно AC . Соответственно, точки P, Q лежат на средней линии треугольника $H_a H_b H_c$ (рис.186).

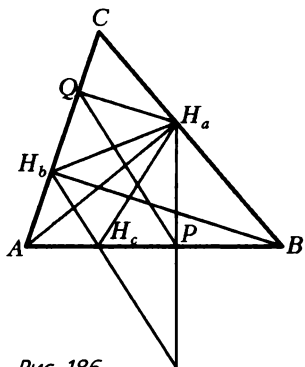


Рис. 186

N – точка пересечения AL и CK , а AH – высота треугольника AKC (рис.187). Так как $\angle A < \angle C$, то B лежит внутри дуги KC , значит, N лежит на отрезке AL , и $AL > AN > AH$. Но $AH > KM$, так как это высоты меньшего и большего углов треугольника AKC . Следовательно, $KM = MO + OK = MO + OB > MB$, т.е. биссектриса угла A длиннее медианы из B .

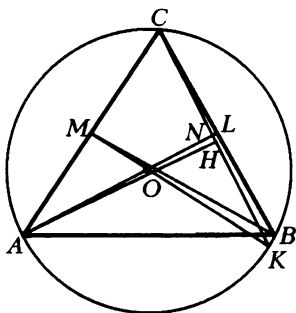


Рис. 187

Второе решение. Так как $AB > BC$, то $\angle MBC > 30^\circ$. Проведем из вершины A высоту AH , а из точки M перпендикуляр MK к стороне BC . Тогда $AL > AH = 2MK > BM$,

так как

$$\sin \angle BMK = \frac{MK}{BM} > \frac{1}{2}.$$

Третье решение (К.Иванов). Построим правильный треугольник ABC' . Из условия задачи следует, что луч BC' лежит внутри угла ABC , следовательно, биссектриса угла A длиннее высоты правильного треугольника. С другой стороны, пусть M, N – середины AC и AC' соответственно. Так как луч AC лежит внутри угла $C'AB$, то $\angle BMN > \angle BMA$. Но $\angle BMA > 90^\circ$, поскольку $AB > BC$. Значит, $BN > BM$, т.е. биссектриса угла A длиннее медианы из B .

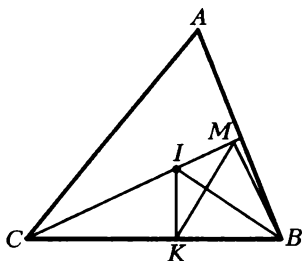


Рис. 188

5. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Тогда четырехугольник $BMIK$ – вписанный, так как $\angle BMI = \angle BKI = 90^\circ$ (рис.188). Значит,

$$\angle MKB = \angle MIB = \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B + \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

6. Да, см. рисунок 189.

7. Пусть O' – центр описанной окружности треугольника ABC . Тогда прямые $O'O$ и $O'W$ перпендикулярны сторонам AC и

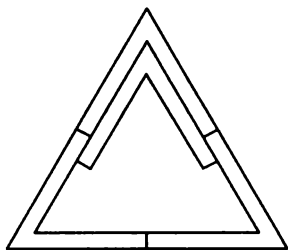


Рис. 189

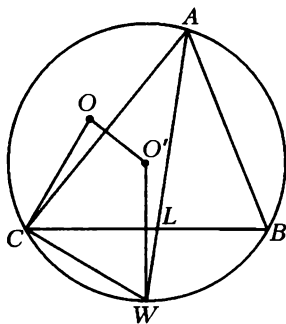


Рис. 190

BC , т.е. направления этих сторон известны. Кроме того, $\angle COL = 2\angle CAL = 2\angle LCW$ и, значит, $\angle OCW = 90^\circ$ (рис.190). Следовательно, C – точка пересечения окружности s и окружности с диаметром OW .

8. Будем считать, что $AB > AC$ и, значит, точки B, N, M, C располагаются на прямой именно в таком порядке. Заметим, что верна

Лемма. Пусть K – середина BC , а I и J – центры вписанной и внеписанной окружностей. Тогда $AN \parallel IK$ и $AM \parallel JK$.

Для доказательства, например, первого утверждения леммы достаточно заметить, что точка вписанной окружности, диаметрально противоположная M , лежит на прямой AN , а K является также серединой MN .

Пользуясь леммой, получаем, что условие задачи равносильно равенству $\angle IKJ = 180^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Покажем, что при $BC = 2MN$ это выполнено. Действительно,

в этом случае M и N будут серединами отрезков KC и KB ; соответственно, IM и JN являются серединными перпендикулярами к этим отрезкам. Значит, треугольники

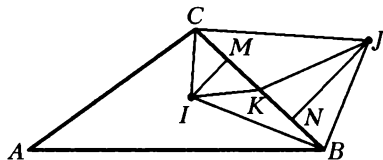


Рис. 191

IKC и JKB равнобедренные (рис.191), и $\angle JKB = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$, $\angle IKC = \frac{\angle C}{2}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь окружность $BICJ$. При фиксированном угле A отрезок IJ является ее диаметром, а дуга BC соответствует углу $90^\circ + \angle A/2$. Когда хорда BC вращается внутри окружности, ее середина K описывает концентрическую окружность меньшего радиуса. С другой стороны, геометрическое место точек K таких, что $\angle IKJ = 180^\circ - \angle A/2$, состоит из двух дуг с концами I и J . Эти два ГМТ пересекаются в четырех точках, расположенных симметрично относительно отрезка IJ и серединного перпендикуляра к нему. Четыре четырехугольника $BICJ$, соответствующие этим точкам, равны, т.е. условие $\angle IKJ = 180^\circ - \angle A/2$ определяет четырехугольник однозначно. Следовательно, оно равносильно равенству $BC = 2MN$.

9 класс

1. Первое решение. Пусть a , b – длины двух сторон треугольника, x , y – длины отрезков, на которые высота делит третью сторону (если основание высоты лежит вне стороны, длину одного из отрезков считаем отрицательной). Тогда по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. С другой стороны, точка касания вписанной окружности делит сторону на отрезки $p - a$ и $p - b$. Поэтому условие задачи равносильно равенству $x - y = 2(a - b)$. Разделив первое равенство на второе, получим, что длина третьей стороны $x + y = (a + b)/2 = 2p/3$.

2. Пусть углы четырехугольника удовлетворяют указанному неравенству. Тогда $\sin \angle CAB > \sin \angle CDB$, и значит, $R_b < R_c$. Поскольку угол CDB тупой, отсюда вне окружности CDB , т.е. $\angle CAD < \angle CBD$ острые, то $\sin \angle CAD < \sin \angle CBD$, того, поскольку $\angle ACB + \angle CBD = \angle ADB$, то $\angle ACB < \angle ADB < 90^\circ$, т.е. $R_a < R_b$.

Обратно, из неравенства $R_b < R_c$ следует, что величина угла CAB лежит между $\angle CDB$ и $180^\circ - \angle CDB$. Тогда, если угол CDB острый, то $\angle ABD < \angle ACD$, а так как $R_a < R_d$, то $\angle ABD > 180^\circ - \angle ACD$. Но тогда, повторяя приведенное выше рассуждение, получаем, что $R_b < R_a < R_d < R_c$.

3. Обозначим точки касания вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности со сторонами AB и BC через U и V . Имеем равенство двойных отношений:

$$(EB; KU) = \frac{EK}{BK} : \frac{EU}{BU} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\angle B}{4}} : \frac{\operatorname{ctg} \frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2}} = (FB; LV).$$

Отсюда следует, что прямые KL , EF , UV пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, что AC , EF , UV пересекаются в одной точке (рис. 193).

4. Прежде всего отметим, что $A_1 A_4 \parallel A_2 A_3$,

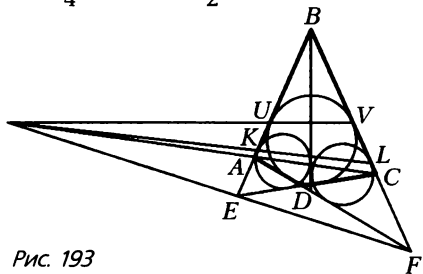


Рис. 193

$A_2A_{10} \parallel A_{14}A_{15}$, $A_{13}A_{14} \parallel A_4A_6$. Поэтому надо доказать, что данные треугольники центрально симметричны.

Пусть A, B, C, D, E, F – середины хорд $A_1A_2, A_3A_4, A_4A_{13}, A_6A_{14}, A_{10}A_{14}, A_{15}A_2$ соответственно. Прямые BC, DE, FA как средние линии трех треугольников параллельны прямым $A_3A_1 \parallel A_6A_{10} \parallel A_1A_{15}$. Прямые AD, BE, CF как оси симметрии

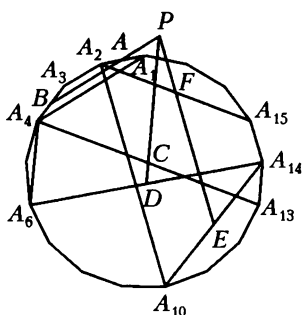


Рис. 194

трех равнобедренных трапеций пересекаются в центре семнадцатиугольника. По двойственной теореме Паппа прямые AB, CD, EF пересекаются в некоторой точке P (рис.194). Но эти прямые являются средними линиями трех полос, образованных парами параллельных сторон данных треугольников. Следовательно, эти треугольники симметричны относительно P .

5. $n = 4$ или $n = 5$. Очевидно, что $n > 3$. Рассмотрим произвольный четырехугольник с вершинами в данных точках. Если центр окружности лежит внутри четырехугольника и не на его диагонали (назовем такой четырехугольник хорошим), то из четырех треугольников, образованных вершинами четырехугольника, остроугольных ровно два. Во всех остальных случаях остроугольных треугольников меньше двух. Следовательно, условие задачи выполняется только тогда, когда все четырехугольники, образованные данными точками, хорошие. Очевидно, что при $n = 4$ и $n = 5$ это возможно (например, можно взять вершины правильного пятиугольника).

Пусть $n > 5$. Рассмотрим какую-нибудь из данных точек A и проведем через нее диаметр AA' . Если точка A' отмечена, то четырехугольник, образованный A, A' и любыми двумя из остальных точек, не будет хорошим. В противном случае найдутся три отмеченные точки, лежащие по одну сторону от AA' . Четырехугольник, образованный этими точками и точкой A , не является хорошим.

6. Пусть C' – точка, симметричная C относительно BN . Тогда $AC' = AB - BC$, и по условию $AM/AC' = AC'/AC$. Значит, треугольники $AC'M$ и ACC' подобны, и $\angle AC'M = \angle C'CA = 90^\circ - \angle BNC$. Кроме того, применяя формулу для медианы, получаем, что $BM^2 = AB \cdot BC$, т.е. $BC'/BM = BM/BA$. Поэтому треугольники $BC'M$ и BMA также подобны, и $\angle BMC' = \angle BAM$. Следовательно, $\angle BMC = 180^\circ - \angle BMC - \angle C'MA = \angle MC'A$, откуда и полу-

чаем требуемое равенство (рис. 195).

7. Пусть O , r – центр и радиус некоторой окружности, касающейся данных; r_1 , r_2 – радиусы данных окружностей. Тогда либо $OO_1 = r_1 - r$, $OO_2 = r_2 + r$, либо $OO_1 = r_1 + r$, $OO_2 = r_2 - r$, и в обоих случаях $OO_1 + OO_2 = r_1 + r_2$. Следовательно, среди всех точек, удовлетворяющих этому условию, надо найти наиболее удаленную от прямой O_1O_2 . Известно, что из всех треугольников с данными основанием и высотой наименьший периметр имеет равнобедренный. Следовательно, наибольшую высоту среди всех треугольников с данными одной стороной и суммой двух других также имеет равнобедренный. Отсюда получаем, что центр искомой окружности лежит на равных расстояниях $(r_1 + r_2)/2$ от точек O_1 и O_2 , а ее радиус равен $|r_1 - r_2|/2$.

8. Да.

Первое решение. Пусть $AC \cap BD = P$, а окружности, вписанные в криволинейные треугольники ABP , BPC , CDP , DAP , касаются описанной окружности $ABCD$ в точках K , L , M , N .

Рассмотрим сегмент ABC . Когда точка X движется по дуге ABC от A к C , радиус окружности, вписанной в сегмент и касающейся дуги в точке X , возрастает, пока X не достигнет середины дуги, и убывает после этого. Следовательно, равным радиусам соответствуют симметричные относительно середины дуги положения X .

Таким образом, $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{LC}$. Аналогично, $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MC}$. Значит, $\overset{\frown}{NK} = \overset{\frown}{LM}$, и $\overset{\frown}{KL} = \overset{\frown}{MN}$. Тогда $\overset{\frown}{NL} = \overset{\frown}{NK} + \overset{\frown}{KL} = 180^\circ$, т.е. NL – диаметр окружности. Аналогично, KM тоже является диаметром.

Симметрия относительно центра описанной окружности O переводит пару окружностей, касающихся ее в точках M и N , в пару окружностей, касающихся в точках K и L . Следовательно, общая внешняя касательная первой пары AC перейдет в CA . Поэтому AC и, аналогично, BD – диаметры окружности, т.е. $ABCD$ – прямоугольник. Его диагонали делят описанную окружность на четыре сектора, и радиусы окружностей, вписанных в эти секторы, равны. Значит, равны и сами секторы, т.е. $ABCD$ – квадрат.

Второе решение. Воспользуемся теоремой Тебо: пусть на стороне AC треугольника ABC взята точка M . Две окружно-

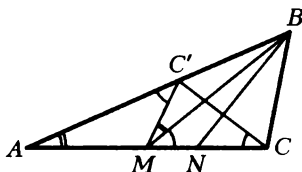


Рис. 195

сти касаются луча MB , прямой AC и (изнутри) описанной окружности треугольника ABC . Тогда прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC .

Доказательство теоремы Тебо можно прочитать в статье В.Ю.Протасова в «Кванте» № 4 за 2008 г.

Применяя теорему Тебо к треугольникам ABC , BCD , CDA , DAB и точке пересечения диагоналей, получаем, что радиусы вписанных окружностей всех четырех треугольников равны. Вычислив площадь каждого из этих треугольников как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности и приравняв суммы площадей двух пар треугольников, получим, что $AC = BD$, т.е. $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Предположим, что AD , BC – ее основания и $AD > BC$. Тогда $S_{ABD}/S_{ABC} = AD/BC > (AD + BD + AB)/(BC + AB + AC)$, и радиусы вписанных окружностей этих треугольников не могут быть равными. Следовательно, $ABCD$ – прямоугольник. Аналогично предыдущему решению получаем, что $ABCD$ – квадрат.

10 класс

1. Применив неравенство о средних, получаем, что левая часть не меньше, чем

$$3\sqrt[3]{\frac{abc}{p}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 3\sqrt[3]{4r^2R}.$$

Поскольку $R \geq 2r$, отсюда следует искомое неравенство.

2. Предположим, что прямые AD и BC пересекаются в точке M . Пусть X , Y – точки пересечения этих прямых с прямой KL . Тогда двойные отношения $(AD; MX)$ и $(BC; MY)$ равны единице. Следовательно, оба отношения AX/XD и BY/YC либо больше, либо меньше 1, и отрезок XY не пересекается с отрезком, соединяющим середины сторон AD и BC , на котором лежит центр тяжести четырехугольника. Поэтому условие задачи выполняется только при $AD \parallel BC$.

3. Пусть A' , B' , C' – центры внеписанных окружностей треугольника ABC . Тогда I – ортоцентр треугольника $A'B'C'$, A , B , C – основания его высот и, значит, описанная окружность ABC является окружностью Эйлера треугольника $A'B'C'$. Следовательно, радиус описанной окружности $A'B'C'$ равен $2R$, а ее центром является точка O' , симметричная I относительно O . Кроме того, точки A , B , A' , B' , лежат на одной окружности.

Прямая AB является общей хордой этой окружности и окружности ABC , а внешняя биссектриса угла C — общей хордой этой окружности и окружности $A'B'C'$. Поэтому точка P является радикальным центром трех окружностей, а прямая PQ — радикальной осью окружностей ABC и $A'B'C'$ (рис.196). Следовательно, $OQ^2 - R^2 = (OQ + OO')^2 - 4R^2$. Поскольку $OO' = OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ как расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей, получаем, что $OQ = R(R+r)/\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

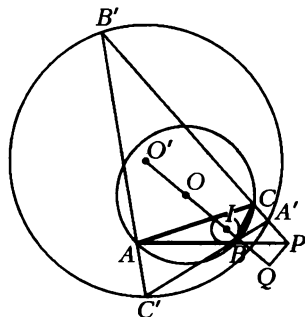


Рис. 196

4. Первое решение. Когда прямые d_a, d_b, d_c вращаются вокруг вершин треугольника, симметричные прямые вращаются с той же скоростью вокруг точек, симметричных вершинам относительно противоположных сторон. Поэтому, во-первых, углы треугольника XYZ не зависят от выбора прямых d_a, d_b, d_c , так что все эти треугольники подобны, во-вторых, точки X, Y, Z движутся с одинаковыми угловыми скоростями по трем окружностям. Значит, центр вписанной окружности тоже движется по некоторой окружности, и достаточно найти три ее точки.

Возьмем прямые d_a, d_b совпадающими с прямой AB . Пусть A', B' — точки, симметричные A, B относительно противоположных сторон треугольника. Тогда Z — точка пересечения прямых AB' и BA' , а Y и X — точки пересечения этих прямых с прямой, параллельной AB и лежащей вдвое дальше от точки C . Заметим, что C и центр O описанной окружности треугольника ABC равноудалены от прямых AB' и BA' , т.е. биссектриса угла XZY совпадает с прямой CO . Кроме того, нетрудно видеть, что биссектрисы углов ZXY и ZYX перпендикулярны AC и BC соответственно.

Рассмотрим проекции точки O и центра вписанной в треугольник XYZ окружности на прямую AC . Точка O проецируется в середину AC . Туда же проецируется точка пересечения прямых AB' и d_c , поскольку углы, образованные этими прямыми с AC , равны. Значит, X и центр вписанной окружности проецируются в точку, симметричную середине AC относительно A (рис.197). Следовательно, расстояние от O до центра вписанной окружности равно удвоенному радиусу описанной окружно-

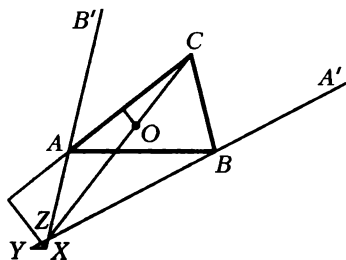


Рис. 197

сти треугольника ABC . Взяв прямые d_a, d_b, d_c параллельными другим сторонам ABC , получим тот же результат. Следовательно, искомое ГМТ – окружность, концентричная описанной окружности ABC , но вдвое большего радиуса.

Второе решение. Рассуждая, как в предыдущем решении, получаем, что когда прямые d вращаются с постоянной скоростью, прямые XY, YZ, ZX также вращаются с постоянной скоростью. Следовательно, вершина X треугольника XYZ описывает окружность с хордой $B'C'$, а биссектриса $\angle YXZ$ вращается вокруг середины W_a дуги $B'C'$ также с постоянной скоростью. Аналогично, биссектрисы углов $\angle Y$ и $\angle Z$ вращаются вокруг середин W_b, W_c соответствующих дуг $A'C'$ и $A'B'$.

Таким образом, центр вписанной окружности I одновременно движется по описанным окружностям треугольников $I W_a W_b, I W_b W_c$ и $I W_c W_a$. Значит, эти окружности совпадают, и искомым ГМТ будет описанная окружность треугольника $W_a W_b W_c$.

Покажем, что каждая из точек W_a, W_b, W_c лежит на расстоянии $2R$ от O . Рассмотрим, например, точку W_a . Пусть BH_b, CH_c – высоты треугольника ABC , O_a – центр описанной окружности треугольника AH_bH_c , O' – точка, симметричная O относительно BC , M_a – середина BC . Треугольники $BCO', H_bH_cO_a$ и $B'C'W_a$ подобны (они все равнобедренные с углом при вершине $2\angle C$), вырожденные треугольники BH_bB_1 и CH_cC_1 также подобны, следовательно, они подобны и «треугольнику» $O'O_aW_a$, т.е. M_aO_a – средняя линия треугольника $O'O_aW_a$. Так как отрезок M_aO_a – диаметр окружности Эйлера, то его длина равна R .

5. Очевидно, что L – основание биссектрисы угла C , а прямые LN, LK параллельны сторонам BC, AC . Поэтому $\angle AO_1L = 2\angle ACL = \angle C = \angle ANL$, т.е. точка O_1 лежит на описанной окружности треугольника ANL и является серединой дуги ANL этой окружности. Следовательно,

$$\angle O_1PL = \angle APL + \angle O_1PA = \angle C + \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{\pi + \angle C}{2}.$$

Аналогично $\angle O_2PL = \frac{\pi + \angle C}{2}$. Значит, $\angle O_1PO_2 = \pi - \angle C$. Но

угол O_1OO_2 также равен $\pi - \angle C$, потому что прямые OO_1 , OO_2 являются серединными перпендикулярами к AC и BC (рис.198).

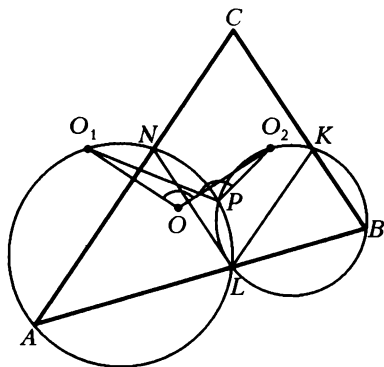


Рис. 198

6. Первое решение. Пусть C_1 – точка касания вписанной окружности со стороной AB , C_2 – вторая точка пересечения этой окружности с прямой CC_1 . Тогда G лежит на отрезке CC_1 . Кроме того, существует центральная проекция, переводящая вписанную окружность в окружность, а G – в ее центр. Треугольник ABC при этой проекции перейдет в правильный, так что двойное отношение $(CG; C_1C_2)$ для любого треугольника такое же, как для правильного, т.е. равно 3. Следовательно, получаем цепочку равносильных утверждений:

$$\angle CGI = 90^\circ; \quad G \text{ – середина } C_1C_2; \quad CC_1 = 3CC_2;$$

$$CC_1 = 3GC_1; \quad GM \parallel AB.$$

7. Из условия задачи следует, что для любых i, j скалярное произведение $(\overline{OA_i}, \overline{OA_j})$ является половиной целого числа. Значит, для любых целых чисел m_1, \dots, m_n длина вектора $m_1\overline{OA_1} + \dots + m_n\overline{OA_n}$ – корень из натурального числа. Отметим на плоскости точки, являющиеся концами всех таких векторов. Пусть X – ближайшая к O из отмеченных точек, Y – ближайшая к O из отмеченных точек, не лежащих на прямой OX . Разобьем плоскость на параллелограммы, образованные векторами $\vec{x} = \overline{OX}$ и $\vec{y} = \overline{OY}$. В силу выбора точек X, Y все отмеченные точки будут вершинами параллелограммов разбиения, следовательно, векторы \vec{x}, \vec{y} – искомые.

8. Нет. Если правильный октаэдр вписан в правильный додекаэдр, то описанная сфера у них одна и та же. Две противоположные вершины октаэдра являются концами диаметра этой сферы и, следовательно, противоположными вершинами додекаэдра, а остальные вершины октаэдра равноудалены от этих двух. Но у додекаэдра нет вершин, равноудаленных от двух противоположных.

Алексей Александрович Заславский

Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

Библиотечка «Квант». Выпуск 113

Приложение к журналу «Квант» №5/2009

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 101

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 1857

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru. E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

83-30
Индекс 70465



Библиотечка КВАНТ



Олимпиады имени
И.Ф.Шарыгина



ВЫПУСК

113